Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen met DERIVE of de TI-89/92

Leon Lenders, Bree

Gewoonlijk begint het hoofdstuk "Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen" met het opstellen van enkele stelsels, uitgaande van nogal eenvoudig gestelde probleempjes en vervolgens wordt dan zeer veel tijd besteed aan het oplossen van stelsels (met m vergelijkingen en n onbekenden) en aan bespreken van het aantal oplossingen. Tenslotte worden dan stelsels met parameters besproken.

In de lespraktijk is het dan gewoonlijk zo dat er slechts enkele lesuren worden besteed aan het opstellen van stelsels, vervolgens worden er zeer vele uren uitgetrokken voor het aanleren van de methode van Gauss-Jordan voor het oplossen van deze stelsels en worden nog meer uren besteed aan het maken van oefeningen, waarbij dan de spilmethode gebruikt wordt om telfouten te vermijden. In werkelijkheid is het natuurlijk zo dat stelsels worden gebruikt om bepaalde concrete problemen uit de praktijk op te lossen en dat de belangrijkste en tevens de moeilijkste stap bij het gebruik van stelsels neerkomt op het opstellen van het stelsel. Het oplossen ervan komt in feite slechts neer op een bepaalde techniek, die veel sneller en zonder fouten kan uitgewerkt worden door een rekentoestel of een computer. De belangrijkheid van de verschillende onderdelen komt dus helemaal niet overeen met de tijd en de inspanning die aan deze onderdelen wordt besteed.

Na een aantal voorbeelden in verband met het bespreken van stelsels met parameters proberen de leerlingen dan ook enkele besprekingen te maken, maar mijn ervaring is daarbij altijd geweest dat slechts een zeer kleine minderheid erin slaagt om ook maar één oefening correct tot op het einde af te werken, ook al zijn de oefeningen zo opgesteld dat de oplossing "goed uitkomt". De leerlingen moeten namelijk verschillende, weliswaar eenvoudige, bewerkingen met veeltermen uitvoeren, maar de kleinste misstap (een foute coëfficiënt, tekenfout, ….) heeft voor gevolg dat er onhandelbare veeltermen ontstaan die onmogelijk nog kunnen leiden tot een of ander resultaat. Van het eigenlijk bespreken van het aantal oplossingen in functie van de paramater komt dus zelden nog iets in huis. Voor de leerlingen is dit hoofdstuk dan ook dikwijls het meest frustrerende en saaie onderdeel uit hun wiskunde-onderwijs.

Indien bij het gebruik van de methode van Gauss-Jordan, zowel voor het oplossen en als voor het bespreken van stelsels, gebruik wordt gemaakt van DERIVE of van de TI-92 (of een ander dergelijk rekenstoestel), wordt dit hoofdstuk echter een zeer zinvol en leerrijk onderdeel voor de leerlingen. Nu kan het ook niet de bedoeling zijn om met één instructie ("row_reduce" of "rref") de oplossing te voorschijn te laten komen, zonder dat de leerlingen nog iets te zien krijgen van de gebruikte methode. Met enkele voorgeprogrammeerde instructies kan men met zowel DERIVE als de TI-92 tot een oplossing komen waarbij alle stappen van de methode van Gauss-Jorean moeten uitgevoerd worden, maar waarbij het rekenwerk wordt overgelaten aan de computer, zodat er op dit vlak geen fouten meer worden gemaakt. De kansen op het verkrijgen van een zinnige oplossing stijgen hierdoor zeer aanzienlijk. De leerlingen kunnen de verkregen oplossing van hun probleem op een zinvolle manier evalueren en komen nu eindelijk eens tot een afgewerkte bespreking van een stelsel met parameters.

Hieronder volgen de instructies die de belangrijkste rij-operaties uitvoeren. Ze kunnen ingegeven worden in een DERIVE-document en als bijvoorbeeld "elmrijop.mth" worden gesaved (zie "INTRODUCTION TO DERIVE FOR WINDOWS", chapter 9, Programming by defining). Voor de TI-92 kunnen ze als "Gebruikersgedefinieerde functies" worden ingegeven en blijven bruikbaar tot ze gewist worden (zie HANDBOEK TI-92, hoofdstuk 10, Extra basisscherm-onderwerpen, p.213).

De DERIVE-functies :

WiSsel de twee rijen i en j :
WS(a , i , j) := VECTOR (IF (r = i , a_j , IF (r = j , a_i , a_r)), r , DIMENSION(a))

VerMenigvuldig de i-de rij met p :
VM(a , i , p) := VECTOR (IF (r = i , p.a_i , a_r) , r , DIMENSION(a))

DeeL de i-de rij door p :
DL(a , i , p) := VECTOR (IF (r = i , 1/p.a_i , a_r) , r , DIMENSION(a))

Tel q-maal de j-de rij Op bij de i-de rij :
TO(a , i , j , q) := VECTOR (IF (r = i , a_i + q.a_j , a_r) , r , DIMENSION(a))

Ruim een element Op in de i-de rij met behulp van de spil in de j-de rij door q-maal de j-de rij af te trekken van p-maal de i-de rij :
RO(a , i , p , j , q) := VECTOR (IF (r = i , p.a_i - q.a_j , a_r) , r , DIMENSION(a))

Na het inlezen van deze instructies (met "Open elmrijop.mth") wordt in hetzelfde document op het volgende "labelnummer" met "Author matrix" de aangevulde coëfficiëntenmatrix van het stelsel ingegeven. Op de volgende nummers worden dan met "Author expression" de gewenste instructies met het openend haakje ingetypt. Met " F3 " kan de matrix van de vorige regel gekopieerd worden in de instructie. Vervolgens geeft men de rijnummers en de eventuele factoren voor de betreffende rij-operatie in en sluit af met het haakje. Met een druk op "Simplify" (of Alt-S) wordt de rij-operatie uitgevoerd. Indien men op "OK" of "Enter" drukt krijgt men eerst nog een kopij van de bewerking zelf. Daarna moet men deze bewerking uitvoeren met "Simplify".

Indien de matrix waarop de rij-operatie moet uitgevoerd worden, "gemarkeerd" is, typt men het volgende in om bijvoorbeeld bij de derde rij , 5-maal de tweede rij op te tellen :
to ([F3] , 3 , 2 , 5) .

Bij het bespreken van stelsels met parameters kan commentaar zoals de voorwaarden (bijvoorbeeld " $m \neq 1$ ") ingegeven worden onder labelnummers. Het vervangen van een parameter door een waarde kan gebeuren met "Substitute for variables" (knop "SUB").

De namen (of de afkortingen) van de instructies en de volgorde van invoeren van de rijnummers en factoren kan men natuurlijk naar willekeur wijzigen in de geprogrammeerde instructies. Men moet er enkel voor zorgen dat de volgorde bij het gebruik van de instructies dezelfde is als bij het ingeven ervan. Het gedeelte achter ":= VECTOR (" moet ongewijzigd blijven.

Voor de TI-92 kunnen de functies het gemakkelijkst geprogrammeerd worden met de "Program Editor". Gebruik daarvoor in het APPS-menu het nummer 7:Program Editor. Kies "3:New" en vervolgens "Type:2:Function". Kies een folder (bijvoorbeeld "main"), geef als "Variable" de gewenste naam van de instructie (bijvoorbeeld "ws") en "Enter". U krijgt het scherm voor het ingeven van een nieuwe functie met volgende inhoud :

```
:ws()
:Func
:
:
:EndFunc
```

Vul dit scherm nu aan tot het volgende :

```
:ws(aa,ii,jj)
:Func
:rowSwap(aa,ii,jj)
:EndFunc
```

Vanaf nu de functie "ws" bruikbaar in het hoofdscherm tot ze gewist wordt.

Op dezelfde manier maakt men de andere functies:

```
:vm(aa,ii,pp)
:Func
```

```
:mRow(pp,aa,ii)
:EndFunc

:dl(aa,ii,pp)
:Func
:mRow(1/pp,aa,ii)
:EndFunc

:to(aa,ii,jj,qq)
:Func
:mRowAdd(qq,aa,jj,ii)
:EndFunc

:ro(aa,ii,pp,jj,qq)
:Func
:mRowAdd(-qq,mRow(pp,aa,ii),jj,ii)
:EndFunc
```

Men typt bijvoorbeeld het volgende in de invoerregel om bij de derde rij , 5-maal de tweede rij op te tellen :
to ([*] , 3 , 2 , 5)
met [*] = automatisch plakken van de te bewerken matrix in de "history area" naar de invoerregel.

Ook hier kan de naam van de functie en de volgorde van de rijnummers en factoren naar willekeur veranderd worden in de functienaam. In de instructies tussen "Func" en "EndFunc" moet de volgorde ongewijzigd blijven.

Hieronder volgt een afdruk van de scherminhoud in DERIVE voor de bespreking van het stelsel

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

#1: "Elementaire rij-operaties - bespreken van stelsels met parameters"

#2: WS(a , i , j) := VECTOR (IF (r = i , a_j , IF (r = j , a_i , a_r)), r , DIMENSION(a))

#3: VM(a , i , p) := VECTOR (IF (r = i , p.a_i , a_r) , r , DIMENSION(a))

#4: DL(a , i , p) := VECTOR (IF (r = i , 1/p.a_i , a_r) , r , DIMENSION(a))

#5: TO(a , i , j , q) := VECTOR (IF (r = i , a_i + q.a_j , a_r) , r , DIMENSION(a))

#6: RO(a , i , p , j , q) := VECTOR (IF (r = i , p.a_i - q.a_j , a_r) , r , DIMENSION(a))

#7: $\begin{bmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{bmatrix}$

#8: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 1 & m & 1 & m \\ m & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

#9: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

#10: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{bmatrix}$

#11: "1) $m \neq 1$"

#12: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^3 \end{bmatrix}$

#13: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & m & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 1 & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix}$

#14: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & m+1 & m^2+m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 1 & m+1 & m^2+m+1 \end{bmatrix}$

#15: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & m+1 & m^2+m \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 0 & m+2 & m^2+2.m+1 \end{bmatrix}$

#16: "1a) $m \neq -2$"

#17: $\begin{bmatrix} m+2 & 0 & 0 & -m-1 \\ 0 & 1 & -1 & -m \\ 0 & 0 & m+2 & m^2+2.m+1 \end{bmatrix}$

#18: $\begin{bmatrix} m+2 & 0 & 0 & -m-1 \\ 0 & m+2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 & m^2+2.m+1 \end{bmatrix}$

#19: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{m+1}{m+2} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{m^2+2.m+1}{m+2} \end{bmatrix}$

#20: "indien m≠1 en m≠ -2 is er 1 oplossing, afhankelijk van m (zie #19)"

#21: "1b) $m = -2$"

#22: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

#23: "indien m = -2 is het stelsel vals"

#24: "2) $m = 1$"

#25: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

#26: "indien m=1 heeft het stelsel een hoofdonbekende en twee nevenonbekenden"
#27: "Opl(S) = {(1 - r - s , r , s)}

Hierbij is na iedere invoer de bewerking onmiddellijk uitgevoerd met "Simplify". Indien men op "OK" of "Enter" drukt, wordt telkens eerst de bewerking op het scherm afgedrukt.

De leerling heeft eerst het document "elmrijop.mth" ingelezen dat de regels van 1 tot en met 6 bevat. Op nummer 7 geeft hij met de knop "Author matrix" de matrix in. Vanaf regel 8 geeft hij met de knop "Author expression" de rij-operaties in. Deze zijn in dit voorbeeld achtereenvolgens :

#8 : ws([F3],1,3)
#9 : ro([F3],2,1,1,1)
#10 : ro([F3],3,1,1,m)
#11 : commentaar : m≠1
 #10 wordt gemarkeerd
#12 : dl([F3],2,m-1)
#13 : dl([F3],3,1-m)
#14 : ro([F3],1,1,2,1)
#15 : ro([F3],3,1,,2,1)
#16 : commentaar : m≠-2
 #15 wordt gemarkeerd
#17 : ro([F3],1,m+2,3,m+1)
#18 : ro([F3],2,m+2,3,-1)
#19 : [F3]/(m+2)
#20 : commentaar : (oplossing)
#21 : commentaar : m=-2
 #15 wordt gemarkeerd
#22 : SUB-knop met "variables:m" en "substitution:-2"
#23 : commentaar : (oplossing)
#24 : commentaar : m=1
 #10 wordt gemarkeerd
#25 : SUB-knop met "variables:m" en "substitution:1"
#26 : commentaar : (oplossing)
#27 : commentaar : (oplossing)

Het gehele document kan dan door de leerling gesaved worden op diskette als bijvoorbeeld "p78vb2.mth". De mogelijkheid bestaat ook om de leerlingen oefeningen als huistaak te laten maken, die ze dan op diskette of uitgeprint op papier kunnen afgeven.

Voor de TI-92 wordt eerst de coëfficiëntenmatrix ingegeven, rechtstreeks in de invoerregel als ([[.,.,.][.,.,.][.,.,.]]), of met behulp van het APPS-menu:6:Matrix Editor. Bij het uitvoeren van de instructies wordt [F3] hier vervangen door het automatisch plakken van de gemarkeerde matrix in de "history area" naar de invoerregel. Het substitueren van m door bijvoorbeeld -2 gebeurt door "-2 STO m" en het opnieuw plakken in de invoerregel van de matrix waarin m moet gesubstitueerd worden.

Indien het programmadeel "Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen" wordt gezien met behulp van DERIVE of de TI-92 (of andere dergelijke software of rekentoestellen) zullen enerzijds de leerlingen meer motivatie hebben om deze leerstof te verwerken en anderzijds kan heel wat meer tijd besteed worden aan het opstellen van een stelsel uit een gegeven probleem, wat tenslotte de essentie is van dit leerstofonderdeel.