Oefeningen op Rijen

Leon Lenders, Bree

In de tekst staan een aantal oefeningen in verband met rijen.
De moeilijkere oefeningen zijn volledig uitgewerkt.

Volgende onderwerpen komen aan bod :

Plooien van een blad papier

Salaris

Het schaakbord

Torens van Hanoi

DIN-papierformaten

Waterreservoir

Frequentie van muzieknoten.

Het “doodvallen” van een botsende bal

De grote en kleine wijzer van een uurwerk

Eiland van Koch

Een harmonische stapel bakstenen

Plooien van een blad papier

Een blad papier met een dikte van 0,1 mm plooit men in twee. De dikte wordt dan 0,2 mm. Na nog een keer plooien wordt de dikte 0,4 mm.
Wat wordt de dikte na 30 maal plooien?

107,4 km

En na 50 maal plooien?

$112{,}6 \cdot 10^6$ km
(d.i. bijna afstand aard - zon)

Hoe dikwijls moet men het blad papier plooien om de afstand van de aarde tot de maan (385.000 km) te overbruggen?

42 maal

Probeer een blad papier met A4-formaat een aantal keer plooien? Hoeveel maal lukt dit?
Stel dat een blad papier met een dikte van 0,1 mm een voldoende aantal keer kan geplooid worden. Wat moet dan de oppervlakte van het blad zijn opdat de oppervlakte na dertig keer plooien 1 cm^2 is?

10,7 ha

Controleer of het volume van het ongeplooide blad papier en het volume van de stapel na 30 keer plooien gelijk zijn.

ja (10,7 m^3)

Salaris

Een bediende in een bedrijf krijgt een beginsalaris van 20.000 euro per jaar en een jaarlijkse opslag van 200 euro. Zijn loon groeit dus aan volgens een rekenkundige rij.
Een tweede bediende krijgt hetzelfde beginsalaris maar kiest – tot verbazing van de bedrijfsdirecteur - voor een halfjaarlijkse opslag van slechts 50 euro.
We vergelijken de lonen van de twee bedienden.

jaar	eerste bediende	tweede bediende
1	20.000	10.000 + 10.050 = 20.050
2	20.200	10.100 + 10.150 = 20.250
3	20.400	10.200 + 10.250 = 20.450

De tweede bediende verdient per jaar 50 euro meer dan de eerste bediende!

Het schaakbord

Toen een rijke Chinese prins tegen het vallen van de avond vaststelde dat hij, ver van zijn kasteel, de terugweg niet meer vond, geraakte hij paniek. Gelukkig kwam hij twee arme landmannen tegen, die langs de rand van de weg zaten te schaken en die hem de juiste terugweg konden uitleggen. Als beloning mochten zij aan de prins een rijkelijke vergoeding vragen. Tot grote verbazing van de prins, zeiden de twee mannen dat zij al gelukkig zouden zijn met "enkele" graankorrels.
Zij vroegen één graankorrel op het eerste vakje van hun schaakbord, twee korrels op het tweede vakje, vier op het volgende, dan acht, enzoverder tot het laatste, vierenzestigste vakje.
De prins maakte zich de bedenking dat deze twee arme kerels wel met heel weinig tevreden waren en nodigde hen dan ook uit om 's anderendaags met paard en kar naar het paleis te komen om hun beloning af te halen. En 's avonds liet de prins de hoeveelheid graan door zijn graanmeester berekenen.
Hoeveel graankorrels liggen er op het vierenzestigste vakje?

$9{,}22 \cdot 10^{18}$

Hoeveel graankorrels liggen er op het hele schaakbord?

$18{,}5 \cdot 10^{18}$

Als één korrel een massa van 0,01 g heeft, wat is dan de totale massa?

$185 \cdot 10^{12}$ kg

Hoeveel zeeschepen van 200.000 ton zijn hiervoor nodig?

bijna één miljoen

Torens van Hanoi

Een “toren van Hanoi” bestaat uit een aantal schijven met verschillende diameter, die over een verticale staaf (A) geschoven worden, zodat de diameters van de schijven naar boven toe afnemen. Met behulp van een middenstaaf (B) moeten de schijven over een derde staaf (C) geschoven worden, zodanig dat bij elke beurt juist één schijf mag verplaatst worden en er nooit een grotere schijf op een kleinere schijf mag liggen.
Hoeveel verplaatsingsbeurten zijn er nodig als de toren 1, 2, 3, 4, 5, 6… schijven bevat?

1, 3, 7, 15, 31, 63, ……

Geef een recursief voorschrift voor deze rij.

$x_n = 2.x_{n-1} + 1$

Geef een expliciet voorschrift voor deze rij.

$x_n = 2^n - 1$

Volgens de legende bevindt zich in een tempel van Hanoi een toren met 64 schijven. Monniken zijn bezig met het verplaatsen van deze schijven. Iedere minuut, dag en nacht, wordt er één schijf verplaatst. Als de toren volledig verplaats is, zal de wereld vergaan. Wanneer zal dat zijn als ze op 28 oktober 1047 gestart zijn met deze opdracht?

over ongeveer $3{,}5 \cdot 10^{13}$ jaren

DIN-papierformaten

Volgens het DIN (Deutsches Institut für Normung) moeten de afmetingen voor papierformaten voldoen aan de volgende voorwaarden.

- Het grootste formaat A_0 heeft een oppervlakte van 1 m² .
- Als een blad van het formaat A_n in twee wordt geplooid, bekomt men een blad van het formaat A_{n+1} .
- Alle formaten zijn gelijkvormig zodat men tijdens het kopiëren kan vergroten of verkleinen naar een ander DIN-formaat.

We bepalen de afmetingen van de formaten A_0 tot A_5 .
We stellen vier betrekkingen op tussen h_0, b_0, h_1 en b_1 van de formaten A_0 en A_1.

$$h_0.b_0 = 1$$

$$h_1 = b_0$$

$$b_1 = \frac{h_0}{2}$$

$$\frac{h_0}{b_0} = \frac{h_1}{b_1}$$

Door in de vierde betrekking b_0, h_1 en b_1 te substueren in functie van h_0, krijgen we $h_0^4 = 2$, waaruit volgt :

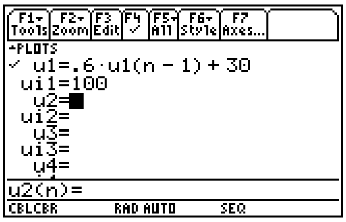
	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
hoogte (mm)	1189	841	594	420	297	210
breedte (mm)	841	594	420	297	210	148

Op een kopieertoestel kan men een tekst van een A_4-formaat vergroten op een A_3-formaat door op de zoomtoets “141%” te drukken en verkleinen op een A_5-formaat door op de zoomtoets “71%” te drukken. Verklaar.

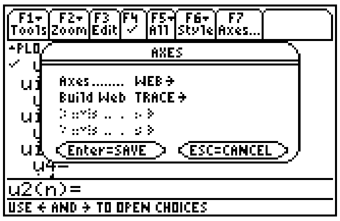
Waterreservoir

In een waterreservoir bevindt zich 100 l water. Per week komt er 30 l bij en verdampt er 40 %. Het recursief voorschrift voor het volume water in het reservoir in functie van het aantal weken is $u_n = 0{,}6.u_{n-1} + 30$ met $u_1 = 100$. Het algemene voorschrift is van de vorm $u_n = q.u_{n-1} + v$ en is een combinatie van een meetkundige en rekenkundige rij.

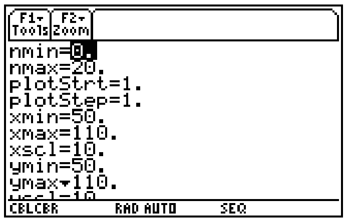
We geven dit voorschrift in op een grafisch rekentoestel:
MODE Graph -> SEQUENCE
Y=
u1(n)=0.6*u1(n-1) + 30
ui1=100
Zowel met GRAPH (denk aan de WINDOW-instellingen) als met TABLE (stel eerst de TblSet in) kunnen we de evolutie van het watervolume nagaan en stellen vast het volume na een lange tijd nadert (dit is de limiet van de rij) naar 75 l.
Deze limiet kan ook met een webdiagram bepaald worden. In het “Y=”-scherm drukken we op F7:Axes. We kiezen voor Axes “WEB” in plaats van “TIME” en drukken op Enter.



Y-scherm



webdiagram



window-instellingen

Het WINDOW stellen we in als volgt:
nmin=0
nmax=20
plotStrt=1
plotStep=1
xmin=50
xmax=110
xscl:=10
ymin=50
ymax=110
yscl=10

We drukken op GRAPH en worden twee rechten getekend. De eerste rechte is de identieke transformatie ($y = x$) en de tweede wordt bepaald door het recursief voorschrift (hier : $y = 0{,}6.x + 30$) (zie fig.1). We drukken op F3:Trace en onderaan het scherm verschijnen: nc:0 (stap), xc:100 (beginwaarde) en yc:0. Door op de rechtse cursortoets te drukken wordt nc:1 (stap) en yc:90 (waarde na 1 stap). xc:100 blijft als de vorige waarde (zie fig.2).

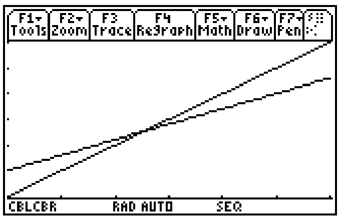


fig. 1

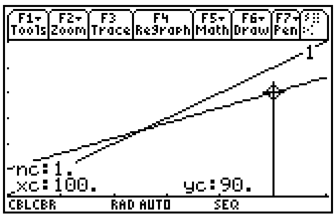


fig. 2

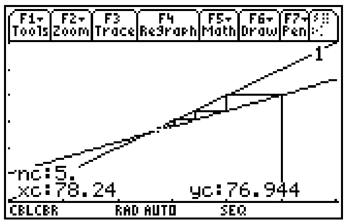


fig. 3 (na 5 stappen)

Door nogmaals op de rechtse cursortoets te drukken wordt deze nieuwe waarde yc:90 door de identieke transformatie overgedragen naar de vorige waarde xc:90. Door nogmaals op de rechtse cursortoets te drukken wordt nc:2 en yc:84 (waarde na stap 2). Door nu telkens tweemaal op de rechtse cursortoets te drukken wordt eerst deze nieuwe waarde (yc) overgedragen naar de vorige waarde (xc) en daarna de volgende waarde berekend. Op het scherm ontstaat daardoor een soort trapfunctie (in sommige gevallen ontstaat een soort web, vandaar de naam). Met de linkse cursortoets kunnen de vorige waarden terug opgeroepen worden.
Als we het beginvolume van het reservoir veranderen in 60 l, stellen we vast dat de limiet niet verandert. Op het webdiagram zien we inderdaad dat de limiet niet bepaald wordt door de beginwaarde maar door het snijpunt van de twee rechten $y = x$ en $y = q.x + v$. Door oplossen van het stelsel vinden we dat de limiet steeds gelijk is aan $\frac{v}{1-q}$. In ons voorbeeld is dat dus $\frac{30}{1-0,6} = \frac{30}{0,4} = 75$.

Frequentie van muzieknoten.

Iedere geluidsgolf kan grafisch voorgesteld worden door een sinuskurve. De toonhoogte van een muzieknoot wordt bepaald door de frequentie van de sinuskurve van de geluidsgolf die deze noot voortbrengt. Hoe groter de frequentie, hoe hoger de toonhoogte.
Twee noten die een octaaf verschillen - bijvoorbeeld een lage do en hoge do - klinken heel mooi samen. Dit komt omdat de frequentie van een hoge do precies dubbel zo groot is als de frequentie van een lage do. Dit geldt ook voor de andere gelijknamige muzieknoten.
Een volledig octaaf bestaat uit dertien noten, namelijk acht hele noten (de witte toetsen op een piano) en vijf halve noten (de zwarte toetsen op een piano : de kruisen en/of de mollen). De frequentie van de opeenvolgende noten ("witte"en "zwarte") van een notenbalk vormen een meetkundige rij met als eigenschap dat de frequentie over een hele octaaf verdubbelt.
Omdat $f_{13} = f_1.q^{12} = 2.f_1$ geldt dat de reden van deze meetkundige rij gelijk is aan $\sqrt[12]{2}$.
Dit kun je zien aan de lengte van de pijpen van een kerkorgel. Bij een klassieke orgel worden de geluidsgolven voortgebracht door de blaaspijpen. Hoe langer de pijp, hoe kleiner de frequentie en hoe lager de toon. Als de pijpen opgesteld zijn van lage naar hoge tonen, zullen de opeenvolgende pijpen steeds korter worden met een factor $2^{\frac{1}{12}}$, zodat om de 12 pijpen de lengte wordt gehalveerd.
Ook bij een gitaar kun je deze meetkundige rij vaststellen. Hier wordt de toonhoogte bepaald door de lengte van de snaar. Hoe korter de snaar, hoe hoger de toon. De lengte van de snaar wordt bepaald door de vaste houder op de buik van de gitaar en het dwarsstaafje op de hals waarop de vinger van de speler geplaatst is. De lengte van de snaar van twee opeenvolgende noten neemt af met een factor $2^{\frac{1}{12}}$ en de lengte van de snaren van twee noten die een octaaf verschillen verandert met een factor 2.

Het "doodvallen" van een botsende bal

Laat een balletje vallen van op een hoogte van één meter en meet hoe hoog het balletje weer opbotst. Doe dit verschillende keren en maak een zo nauwkeurig mogelijk gemiddelde. Deze (gemiddelde) hoogte drukken we uit in een percentage (p %) en noemen dit de "veerkracht" van het balletje (Als het balletje 70 cm opbotst, is de veerkracht 70 %) .
We gaan nu berekenen na hoeveel seconden het balletje "doodvalt", dit is wanneer het balletje niet meer botst, maar begint te rollen. Dit kan met een eenvoudige chronometer gecontroleerd worden.
We gaan eerst na welke afstand het balletje heeft afgelegd. Het valt eerst 1 m naar beneden, daarna botst het weer op en valt weer over de hoogte die p % is van de vorige hoogte. Deze opeenvolgende hoogtes vormen een meetkundige rij waarvan de eerste term 1 en reden p % is.

De totale afgelegde weg is dus

$$1+2.\left(\frac{p}{100}+\left(\frac{p}{100}\right)^2+\left(\frac{p}{100}\right)^3+\ldots\right)=1+2.\frac{\frac{p}{100}}{1-\frac{p}{100}}=\frac{100+p}{100-p}$$

Is de veerkracht bijvoorbeeld 70 %, is de totale afgelegde weg $\frac{17}{3}$ meter.

Uit de formule voor de vrije val $h=\frac{g.t^2}{2}$ volgt dat $t=\sqrt{\frac{2}{g}}.\sqrt{h}$.

Op dezelfde manier berekenen we nu de totale tijd.

$$t=\sqrt{\frac{2}{g}}.\left(1+2.\left[\left(\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{p}{100}\right)^{\frac{2}{2}}+\left(\frac{p}{100}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots\right]\right)=\sqrt{\frac{2}{g}}.\left(1+2.\frac{\sqrt{\frac{p}{100}}}{1-\sqrt{\frac{p}{100}}}\right)$$

Voor p = 70 wordt dit dan bijvoorbeeld 5,077 s .

De grote en kleine wijzer van een uurwerk

We gebruiken een analoog uurwerk met wijzers die zich met een continue snelheid ronddraaien. Hoe dikwijls zal de grote wijzer de kleine wijzer inhalen tussen 01.00 's nachts en 13.00 uur 's middags?

Dit gebeurt elf maal, namelijk eenmaal tijdens ieder gans uur (bijvoorbeeld tussen 01.00 en 02.00 uur), behalve tussen 11.00 uur en 13.00 uur; in de loop van deze twee uur gebeurt dit maar éénmaal, namelijk om 12.00 uur. Dit is logisch want wanneer de grote wijzer twaalf maal is rondgedraaid, is de kleine wijzer eenmaal rondgeweest.
We vragen ons nu af "hoelaat" (dit is: hoeveel minuten na het passeren van het ganse uur) deze inhaling telkens plaats heeft. Tussen bijvoorbeeld 07.00 en 08.00 uur gebeurt dit "later" (dit is: meer minuten na het ganse uur) dan tussen 04.00 en 05.00 uur, omdat de kleine wijzer "meer voorsprong" heeft op de grote wijzer die dus telkens van boven vertrekt. Welke soort rij vormen deze tijdstippen?

Als voorbeeld berekenen we exact het tijdstip waarop de grote wijzer de kleine wijzer inhaalt tussen 07.00 en 08.00 uur. Voor de twee wijzers moeten we eenzelfde eenheid gebruiken. Als eenheid gebruiken we de minuut. Voor de grote wijzer is dit logisch, maar als de kleine wijzer op 7 staat, heeft hij de waarde 35. Om 07.00 ur precies staat de grote wijzer op 0 en de kleine

wijzer op 35. Als de grote wijzer zich verplaatst heeft naar 35, heeft de kleine wijzer zich ook een stukje verder verplaatst. Wanneer de grote wijzer dit stukje overbrugd heeft, is de kleine wijzer weer een nog kleiner stukje verder bewogen en moet de grote wijzer ook dit stukje weer overbruggen, maar dan gaat de kleine wijzer weer een beetje verder, enz. Volgens de "paradox van Zeno" zal de grote wijzer de kleine wijzer dus nooit kunnen inhalen, maar het is duidelijk dat dit wel zal gebeuren (de tijd staat niet stil!). Maar wanneer juist?
De snelheid van de kleine wijzer is twaalf keer kleiner dan die van de grote wijzer. Wanneer de grote wijzer de eerste 35 minuten heeft overbrugd, heeft de kleine wijzer $\frac{35}{12}$ minuten afgelegd. Als de grote wijzer deze afstand heeft ingehaald, heeft de kleine wijzer weer $\frac{35}{144}$ minuten afgelegd. Deze "stukjes" vormen dus een meetkundige rij met 35 als eerste term en $\frac{1}{12}$ als reden. Vermits deze rij convergeert, is de som van alle (oneindig vele) termen eindig en gelijk aan $\frac{t_1}{1-q} = \frac{35}{1-\frac{1}{12}} = \frac{35.12}{11} = \frac{420}{11} = 38{,}1818.....$.
Het juiste tijdstip is dus 7 uur en 38,1818… minuten of 07:38:10,9090… uur.

De andere tijdstippen vind je in de volgende tabel.

tussen … en … uur	t_1	som ($q = \frac{1}{12}$)	tijdstip	exact
01.00 – 02.00	5	$\frac{60}{11}$	1 uur en 5,4545… min	01:05:27,2727…
02.00 – 03.00	10	$\frac{120}{11}$	2 uur en 10,9090… min	02:10:54,5454…
03.00 – 04.00	15	$\frac{180}{11}$	3 uur en 16,3636… min	03:16:21,8181…
04.00 – 05.00	20	$\frac{240}{11}$	4 uur en 21,8181… min	04:21:49,0909…
05.00 – 06.00	25	$\frac{300}{11}$	5 uur en 27,2727… min	05:27:16,3636…
06.00 – 07.00	30	$\frac{360}{11}$	6 uur en 32,7272… min	06:32:43,6363…
07.00 – 08.00	35	$\frac{420}{11}$	7 uur en 38,1818… min	07:38:10,9090…
08.00 – 09.00	40	$\frac{480}{11}$	8 uur en 43,6363… min	08:43:38,1818…
09.00 – 10.00	45	$\frac{540}{11}$	9 uur en 49,0909… min	09:49:05,4545…
10.00 – 11.00	50	$\frac{600}{11}$	10 uur en 54,5454… min	10:54:32,7272…
11.00 – 13.00	55	$\frac{660}{11} = 60$	11 uur en 60 min	12:00:00

Deze tijdstippen vormen een rekenkundige rij met als verschil 1 uur en $\frac{60}{11}$ minuten, of $\frac{720}{11}$ minuten, en dit is natuurlijk het elfde deel van de verlopen 12 uur.

Eiland van Koch

In een gelijkzijdige driehoek met zijde a verdelen wij elke zijde in 3 gelijke delen. Buiten de driehoek construeren we op het middelste lijnstuk van iedere zijde een kleinere gelijkzijdige driehoek en laten dat middelste stuk weg. In een tweede stap passen we dezelfde werkwijze toe op elk van de zo onstane zijden na de eerste stap. Deze werkwijze blijven we toepassen op elk lijnstukje. Zo ontstaat een eiland van Koch.

We berekenen het aantal zijden, de omtrek en de oppervlakte bij de opeenvolgende stappen.

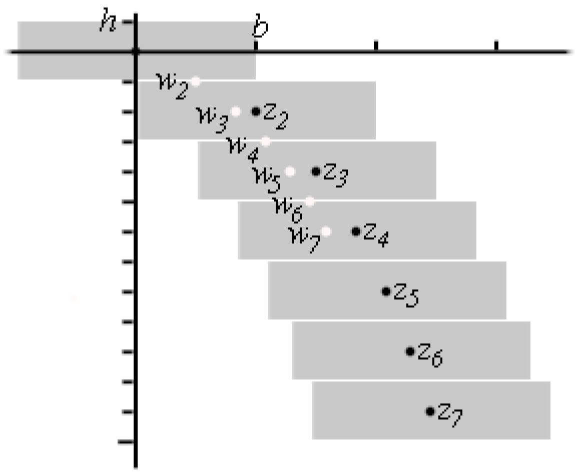
1 Vermits iedere zijde telkens in vier kleinere zijden wordt verdeeld, vormt het aantal zijden een meetkundige rij met expleciet voorschrift $a_n = 3.4^n$. Het aantal zijden divergeert na een oneindig aantal stappen naar oneinidg.

2 Bij iedere stap wordt de lengte van een zijde driemaal kleiner.
Vermits het aantal zijden telkens vier keer groter wordt, vormt de omtrek dus een meetkundige rij met voorschrift $Om_n = Om_0.\left(\frac{4}{3}\right)^n$. Na een oneindig aantal stappen divergeert de omtrek ook naar oneindig.

3 De oppervlakte van de eerste gelijkzijdige driehoek noemen we A_0.
Vermits er telkens driehoeken bijkomen op de buitenzijde van de figuur neemt de oppervlakte bij elke stap toe.
Bij de oorspronkelijke oppervlakte A_0 komt na de eerste stap 3 (aantal zijden) keer een oppervlakte bij die 9 maal kleiner is dan de oorspronkelijke oppervlakte.
Dus $A_1 = A_0 + 3.\frac{A_0}{9}$
Na de tweede stap neemt de oppervlakte toe met 12 (aantal zijden) driehoekjes die weer 9 maal kleiner zijn dan die van de eerste stap.
Dus $A_2 = A_0 + 3.\frac{A_0}{9} + 12.\frac{A_0}{9^2}$
Na de derde stap komen er 48 (aantal zijden) driehoekjes bij die weer 9 maal kleiner zijn dan de driehoekjes die er bij de tweede stap bijkwamen.
Dus $A_3 = A_0 + 3.\frac{A_0}{9} + 12.\frac{A_0}{81} + 48.\frac{A_0}{9^3}$
Na de *n*-de stap komt er bij de oppervlakte van de vorige stap telkens $\frac{3.4^{n-1}}{9^n}.A_0$ bij.
De toename ten opzichte van de oorspronkelijke oppervlakte kunnen we dus schrijven als de som van de termen van een meetkundige rij met als reden $\frac{4}{9}$.
De oppervlakte na *n* stappen $A_n = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_0}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)^{i-1}$
Na een oneindig aantal stappen is de som van de termen met deze meetkundige rij gelijk aan
$\frac{A_0}{3}.\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5}.A_0$
De oppervlakte neemt bij iedere stap toe, maar na een oneindig aantal stappen is de oppervlakte van de figuur dus toch eindig, namelijk $A_0 + \frac{3}{5}.A_0 = \frac{8}{5}.A_0$

Een harmonische stapel bakstenen

We gaan bakstenen op elkaar stapelen zodat een harmonische rij ontstaat.
De breedte van de bakstenen noemen we $2b$ en de hoogte noemen we $2h$.
We leggen eerst twee bakstenen op elkaar zodat de bovenste (eerste) steen net niet van de onderste (tweede) steen afvalt. De eerste steen steekt dan half boven de tweede steen uit. Deze stapel leggen we vervolgens op een derde steen zodat de nieuwe stapel nog net in evenwicht is. Dit herhalen we met een vierde, vijfde, zesde, … steen.



We plaatsen deze stapel in een assenstelsel zodat het zwaartepunt van de eerste steen in de oorsprong ligt en zodat de randen van de steen parallel lopen met de X- en Y-as. De tweede steen raakt dan aan de Y-as en leggen we in het vierde kwadrant. De coördinaat van het zwaartepunt van de eerste steen is dan $z_1(0,0)$, voor de tweede steen hebben we $z_2(b,-2h)$ en voor het zwaartepunt van de stapel van deze 2 stenen hebben $w_2(\frac{1}{2}b, -h)$.
We bepalen nu de coördinaten $z_i(x_i,y_i)$ van de zwaartepunten van de volgende stenen en van de zwaartepunten $w_i(u_i,v_i)$ van de opeenvolgende stapels
De tweede coördinaatgetallen y_i van de afzonderlijke stenen nemen toe volgens een rekenkundige rij : 0, $-2h$, $-4h$, $-6h$, …………..
De tweede coördinaatgetallen v_i van de stapels nemen dus ook toe volgens de eenvoudige rekenkundige rij : 0, $-h$, $-2h$, $-3h$, …………

Het bepalen van de eerste coördinaatgetallen is moeilijker.
De eerste coördinaatgetallen x_i van de afzonderlijke stenen verkrijgen we door b op te tellen bij het eerste coördinaatgetal u_{i-1} van het zwaartepunt van de erop liggende stapel.
Zo is $x_2 = u_1 + b = b$, want $u_1 = x_1 = 0$.
En $x_3 = u_2 + b = \frac{1}{2}b + b = \frac{3}{2}b$.
Het eerste coördinaatgetal u_i van een bepaalde stapel is de som van de eerste coördinaatgetallen van de afzonderlijke stenen van die stapel, gedeeld door het aantal stenen van die stapel, dus $u_i = \frac{\sum_{k=1}^{i} x_k}{i} = \frac{\sum_{k=1}^{i-1} x_k + x_i}{i} = \frac{(i-1).u_{i-1} + x_i}{i}$.
In onderstaande tabel staan de waarden van x_i en u_i voor de eerste waarden van i.
Volgens bovenstaande formules is bijvoorbeeld

$$x_5 = u_4 + b = \frac{13b}{12} + b = \frac{25b}{12}$$

en

$$u_5 = \frac{4.u_4 + x_5}{5} = \frac{4.\frac{13b}{12} + \frac{25b}{12}}{5} = \frac{77b}{60}$$

i	x_i	u_i
1	0	0
2	b	$\frac{b}{2}$
3	$\frac{3b}{2}$	$\frac{5b}{6}$
4	$\frac{11b}{6}$	$\frac{13b}{12}$
5	$\frac{25b}{12}$	$\frac{77b}{60}$
6	$\frac{137b}{60}$	$\frac{29b}{20}$
7	$\frac{49b}{20}$	$\frac{223b}{140}$
8	$\frac{363b}{140}$	....

We berekenen nu de afstand a_i tussen de zwaartepunten x_i en x_{i+1} van de twee opeenvolgende stenen, dus $a_i = x_{i+1} - x_i$.

We bekomen dan de rij (a_i) : $b, \frac{b}{2}, \frac{b}{3}, \frac{b}{4}, \frac{b}{5}, \frac{b}{6}, \frac{b}{7}, ...$.

Met $b = 1$ bekomen we dus de harmonsche rij.
De termen van de rij (x_i) met $i = 2 , 3 , 4 , 5 , ...$ kunnen dus zeer eenvoudig geschreven worden als :

$$x_i = b.\sum_{n=1}^{i-1} \frac{1}{n} \ .$$