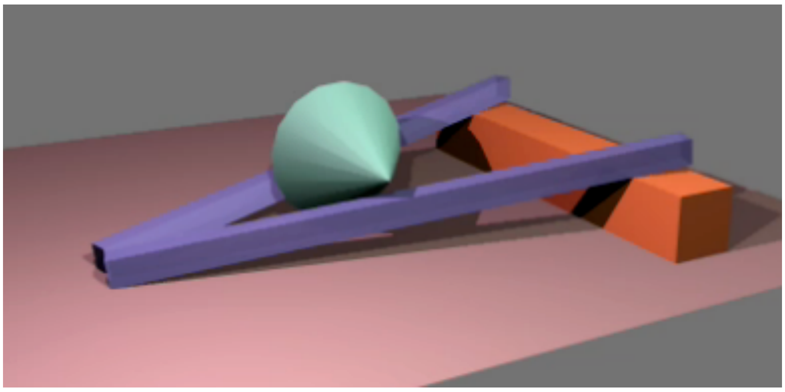
De oplopende dubbele kegel

Leon Lenders

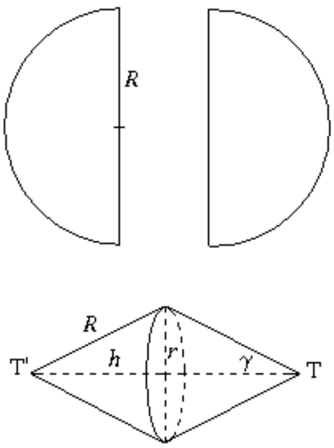


Het experiment van de 'bergop lopende kegel' bestaat enerzijds uit een helling in V-vorm met de scherpe hoek aan de laagste kant en anderzijds uit twee kegels die met hun grondvlakken aan elkaar gemaakt zijn tot een dubbele kegel. Wanneer de dubbele kegel op de lage kant van de helling geplaatst wordt, zal hij – als er aan bepaalde voorwaarden voldaan is – spontaan bergop lopen. Hoewel de dubbele kegel schijnbaar bergop loopt, zal door de breder wordende V-vorm het zwaartepunt toch dalen.

De voorwaarden waaraan moet voldaan zijn voor het bergop lopen, worden in deze tekst onderzocht. Hiervoor is een goed ruimtelijk inzicht nodig. De wiskundige kennis die gebruikt wordt, is eerder beperkt: driehoeksmeting in rechthoekige driehoeken en gelijkvormige driehoeken.

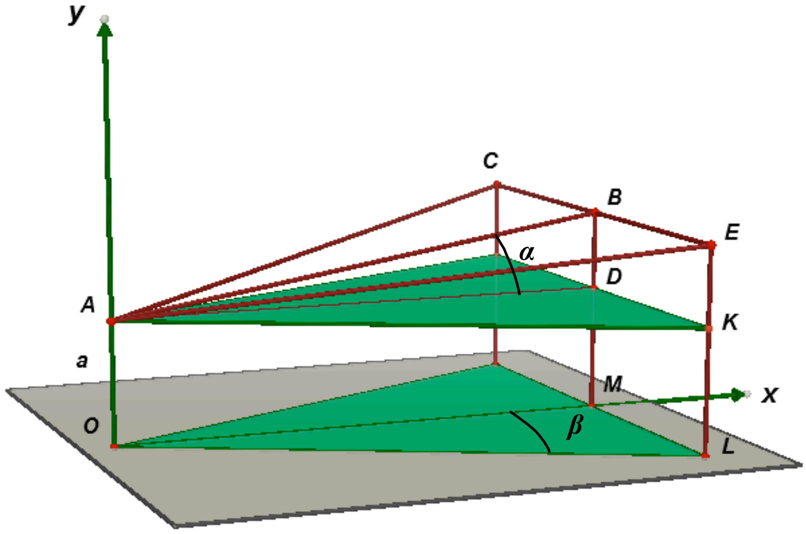
Op Youtube worden verschillende animaties van dit experiment getoond. Je vindt ze door te zoeken op het trefwoord 'Uphill Rollerd', zie bijvoorbeeld http://www.youtube.com/watch?v=zkt1eScOCEI.

De proefopstelling



De dubbele kegel kan gemaakt worden door twee halve cirkels met straal R uit te knippen en ze op te rollen tot twee kegels. Als je ze in karton maakt, zal je ze bijvoorbeeld met rijstkorrels moeten vullen om voor het nodige gewicht te zorgen. Daarna plak je de twee kegels met de basissen aan elkaar.

De lengte van de boog van de halve cirkel (πR) wordt de omtrek van het grondvlak van de kegel ($2\pi r$). Hieruit kan je afleiden dat $r = \frac{R}{2}$. De hoogte van de kegel is dan $h = \frac{\sqrt{3}R}{2}$ en de halve tophoek is $\gamma = 30°$. Uiteraard kan je bij de constructie van de kegel ook uitgaan van een cirkelsector die kleiner (of groter) is dan een halve cirkel. De kegel zal dan scherper (of stomper) zijn dan in het voorstel hierboven.

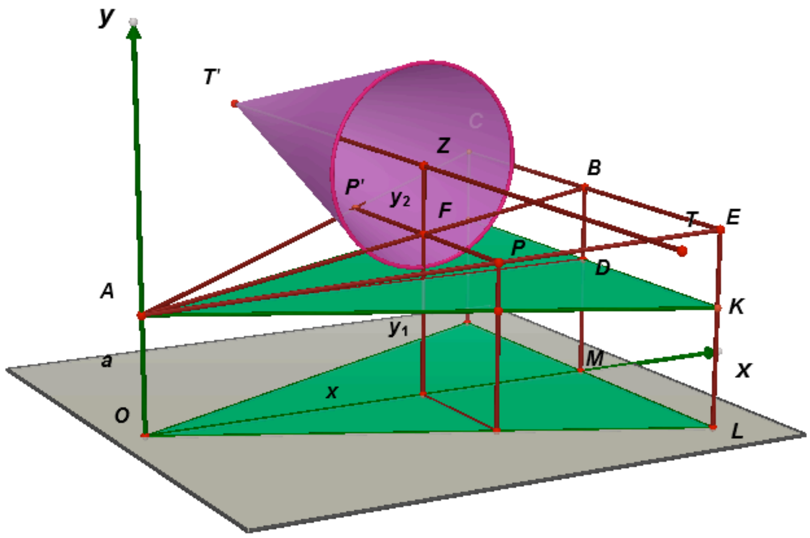


Vervolgens beschrijven we het hellend vlak. De twee rails AC en AE waarover de dubbele kegel rolt, komen samen in het punt A op een hoogte a boven het tafelblad. De helling van het hellend vlak wordt gemeten in het bissectricevlak van de twee rails. De grootte van de hellingshoek $\angle DAB$ noemen we α. De opening tussen de rails wordt gemeten in een horizontaal vlak. Om praktische redenen gaan we hier over op de halve openingshoek. De grootte van de hoek $\angle MOL$ noemen we β.

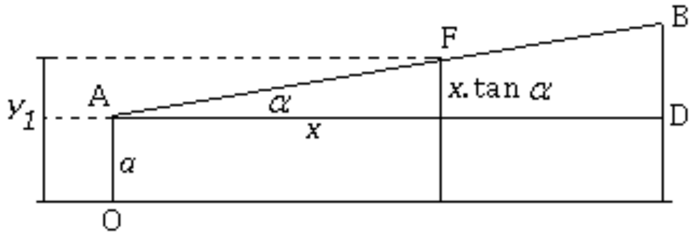
Hiermee ligt de hele helling vast. We definiëren nu een tweedimensionaal assenstelsel in het bissectricevlak van de twee rails. De y-as is de verticale rechte OA door het laagste punt van de rails. De x-as is de horizontale rechte OM loodrecht op OA in het bissectricevlak.

Berekening van de zwaartepuntshoogte

Nu voegen we de kegels toe. Om de figuur niet nodeloos te verzwaren tekenen we slechts één van beide kegels. Het zwaartepunt Z van de dubbele kegel ligt in het midden van het horizontale lijnstuk $[TT']$ door de twee toppen. Dit lijnstuk is wel afgebeeld op de figuur hieronder. Je ziet ook duidelijk de twee contactpunten van de dubbele kegel met de rails. Ze vormen het lijnstuk $[PP']$.



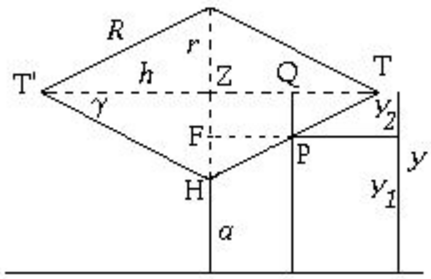
We onderzoeken nu de hoogte y van het zwaartepunt in functie van de x-waarde. Deze hoogte is de som van twee afstanden: de hoogte y_1 van de contactpunten boven het tafelblad en de hoogte y_2 van het zwaartepunt boven de verbindingslijn van de contactpunten.



Op de dwarsdoorsnede van het hellend vlak hierboven zie je hoe je y_1 kan uitdrukken in functie van x:

$$y_1 = a + x \cdot \tan\alpha .$$

Hieronder zie je een andere dwarsdoorsnede, die van de dubbele kegel. Ze heeft de vorm heeft van een ruit. Op deze tweedimensionale figuur kan je ook de hoogte y_1 aflezen van de contactpunten boven het tafelblad en de hoogte y_2 van het zwaartepunt Z boven de verbindingslijn van de contactpunten. Er zijn twee soorten gelijkvormige driehoeken met een tophoek γ afgebeeld, een kleine *TQP* en een grote *TZH*.



Alleen y_2 moet nog berekend worden. Je kan dit doen met evenredigheden tussen overeenkomstige zijden van gelijkvormige driehoeken. Maar het kan ook met de definitie van de tangens in de kleine rechthoekig driehoek *TQP*. Deze driehoek heeft een korte rechthoekszijde y_2 en een lange rechthoekszijde gelijk aan $h - |FP| = h - x \cdot \tan\beta$. Voor deze laatste term moet je het verband leggen met de driedimensionale tekening. Je vindt op deze figuur dat $|FP| = x \cdot \tan\beta$. Deze bedenkingen leiden tot de formule $y_2 = \tan\gamma\left(h - x \cdot \tan\beta\right)$. Via de definitie van de tangens in de grotere rechthoekige driehoek *TZH* geldt dat $r = h.\tan\gamma$ en vinden we y_2 in functie van x:

$$y_2 = r - x \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma .$$

Samengevat geven deze formules een zwaartpuntshoogte

$$y = a + r + \left(\tan\alpha - \tan\beta \cdot \tan\gamma\right) \cdot x .$$

De hoogte van het zwaartepunt van de kegels wordt dus bepaald door de vergelijking van een rechte die de y-as snijdt in het punt $\left(0, a + r\right)$ met als richtingscoëfficiënt $\tan\alpha - \tan\beta \cdot \tan\gamma$.

Interpretatie van de zwaartepuntsformule

Als $x = 0$ dan balanceert de dubbele kegel precies boven het punt *A*. Het is dan duidelijk dat de zwaartepuntshoogte gelijk is aan $a + r$.

De rechte waarop het zwaartepunt zich beweegt is dalend als $\tan\alpha < \tan\beta \cdot \tan\gamma$. Dat is bijvoorbeeld het geval indien $\alpha = 10°$, $\beta = 25°$ en $\gamma = 30°$. De richtingscoëfficiënt van de rechte waarop het zwaartepunt beweegt is nu gelijk aan $-0,092$ terwijl de dubbele kegel schijnbaar bergop loopt.

Je kan je afvragen wanneer het voorwerp geen enkele helling op kan, hoe zwak helling deze ook is. Volgens de formule $\tan\alpha < \tan\beta \cdot \tan\gamma$ gebeurt dit enkele wanneer β gelijk is aan 0 (de rails lopen evenwijdig) of wanneer γ gelijk is aan nul (de dubbele kegel is een cilinder).

Ten slotte nog dit. Doordat het hellend vlak steeds breder wordt, zal de dubbele kegel na een bepaalde afstand *x* tussen de rails door vallen. Dit is het geval als $x \cdot \tan\beta > h$. Met de waarden $\alpha = 10°$, $\beta = 25°$ en $\gamma = 30°$ en de hoogte $h = 4,5$ zal de dubbele kegel na 9,65 cm tussen de rails vallen. Daarom moet er op deze afstand een stootblok gelegd worden.

Op de site http://lkwadraat.telenet.be (Toepassingen) vind je een applet waarop de hoeken α, β en γ kunnen ingesteld worden. De bijbehorende baan van het zwaartepunt en het hellend vlak worden hier visueel voorgesteld. Als je overtuigd bent van de juistheid van de berekeningen hierboven en je hebt niet direct zin om een hellend vlak en een dubbele kegel te knutselen, kan dit een mogelijk alternatief zijn ...