Het Monty Hall-probleem

Tijdens een spel kan een kandidaat een auto winnen. Achter 2 deuren staat geit en achter een derde deur staat een auto. Als de kandidaat kan raden achter welke van de drie deuren de auto staaat, dan wint hij die auto. De kandidaat moet eerst een deur aanwijzen, maar deze wordt nog niet geopend. Vervolgens opent de presentator een andere deur waarvan hij weet dat er een geit achter staat. De kandidaat kan nu bij zijn eerste keuze blijven of hij mag nog van deur veranderen. Wat moet hij doen? Bij zijn eerste keuze blijven, van deur veranderen of maakt het niet uit wat hij doet?

I. In woorden.

A. Je verandert na je eerste keuze.

Voor de eerste keuze zijn er twee mogelijkheden:

1. Je eerste keuze is fout (geit). Deze kans is 2/3 (twee geiten, één auto).
   De spelleider heeft nu geen keuze en opent de andere deur met de geit.
   Als je van deur verandert, heb je altijd de deur met de auto.
2. Je eerste keuze is juist (auto). Deze kans is 1/3 (twee geiten, één auto).
   Als je nu van deur verandert kun je niet meer winnen.
   Besluit : als je na de eerste van keuze verandert, is dus de kans dat je wint, gelijk aan 2/3.

B. Je verandert **niet** na je eerste keuze.

Voor de eerste keuze zijn er weer twee mogelijkheden:

1. Je eerste keuze is fout (geit). Deze kans is 2/3 (twee geiten, één auto).
   De spelleider heeft nu geen keuze en opent de andere deur met de geit.
   Als je niet van deur verandert, win je de auto niet.
2. Je eerste keuze is juist (auto). Deze kans is 1/3 (twee geiten, één auto).
   Als je nu niet van deur verandert, win je.
   Besluit : als je na de eerste keuze niet van keuze verandert, is de kans dat je wint gelijk aan 1/3.

Overzicht

A. STEEDS VERANDEREN VAN DEUR		
Eerste keuze	Tweede keuze	Kans op winst
Fout : kans is 2/3	Altijd juist: kans is 1	2/3 x 1 = **2/3**
Juist : kans is 1/3	Je verliest, kans op winst= 0	1/3 x 0 = **0**
	Samen	2/3 + 0 = **2/3**

B. NIET VERANDEREN VAN DEUR		
Eerste keuze	Tweede keuze	Kans op winst
Fout : kans is 2/3	Altijd fout: kans op winst= 0	2/3 x 0 = **0**
Juist : kans is 1/3	Altijd winst : kans = 1	1/3 x 1 = **1/3**
	Samen	0 + 1/3 = **1/3**

II. Met formules uit de kansrekening.

Stel :
A1 = de auto staat achter deur 1,
A2 = de auto staat achter deur 2,
A3 = de auto staat achter deur 3,
D1 = de presentator opent deur 1,
D2 = de presentator opent deur 2,
D3 = de presentator opent deur 3.
Dan : $P(A1) = \frac{1}{3}$, $P(A2) = \frac{1}{3}$, $P(A3) = \frac{1}{3}$

De kandidaat kiest voor deur 1.
De presentator opent nu een andere deur

- $P(\mathrm{D1}) = 0$, want die heeft de kandidaat al geopend
- $P(D2|\mathrm{A1}) = \frac{1}{2}$, $P(D2|\mathrm{A2}) = 0$, $P(D2|\mathrm{A3}) = 1$
- $P(D3|\mathrm{A1}) = \frac{1}{2}$, $P(D3|\mathrm{A2}) = 1$, $P(D3|\mathrm{A3}) = 0$

De presentator opent nu deur 3 (D3).
De kandidaat wisselt nu van deur en kiest voor deur 2.
Dan is de kans dat de auto achter deur 2 staat (**de regel van Bayes**)

$$P(A2|D3) = \frac{P(A2 \cap D3)}{P(D3)} = \frac{P(A2 \cap D3)}{P(D3 \cap A1) + P(D3 \cap A2) + P(D3 \cap A3)} =$$

$$= \frac{P(D3|A2).P(A2)}{P(D3|A1).P(A1) + P(D3|A2).P(A2) + P(D3|A3).P(A3)} =$$

$$\frac{1 \, . \, \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} . \frac{1}{3} + 1 \, . \, \frac{1}{3} + 0 \, . \, \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Dus de kans dat de kandidaat de auto wint als hij eerst voor deur 1 kiest en **daarna voor deur 2 kiest** omdat de presentator deur 3 heeft geopend, is gelijk **aan 2/3**.

Als de kandidaat niet van deur wisselt en voor deur 1 blijft staan, is de kans dat de auto achter deur 1 staat, als de presentator deur 3 heeft geopend, gelijk aan

$$P(A1|D3) = \frac{P(A1 \cap D3)}{P(D3)} = \frac{P(A1 \cap D3)}{P(D3 \cap A1) + P(D3 \cap A2) + P(D3 \cap A3)} =$$

$$= \frac{P(D3|A1).P(A1)}{P(D3|A1).P(A1) + P(D3|A2).P(A2) + P(D3|A3).P(A3)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 0} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Dus de kans dat de kandidaat de auto wint als hij eerst voor deur 1 kiest en **daarna voor deur 1 blijft staan** als de presentator deur 3 heeft geopend, is gelijk **aan 1/3.**

De kandidaat moet dus zeker altijd van deur wisselen; zijn kans om de auto te winnen wordt dan dubbel zo groot : $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ **(67%) in plaats van** $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ **(33%)**

De andere gevallen, dus als de eerste keuze van de kandidaat deur 2 of deur 3 is en daarna de presentator een andere deur opent , zijn analoog.