Wat zijn logaritmen en waarvoor worden ze gebruikt?

$$\mathbf{7^2 = 49}$$

7 is het grondtal
2 is de exponent (= logaritme)
49 is de macht van 7 tot de 2de

Om het **grondtal 7** terug te vinden nemen we de 2-machtswortel (vierkantswortel) of ^{2}mw van 49

$$\sqrt[2]{49} = \left(\sqrt{49}\right) = 7$$

Stel dat we gewoon waren dit te schrijven als

$$^2\text{mw } 49 = 7$$

Om de **exponent 2** terug te vinden nemen we de 7-logaritme van 49
Dit schrijven we als

$$^7\log 49 = 2$$

$$\mathbf{2^3 = 8}$$

2 is het grondtal
3 is de exponent (logaritme)
8 is de macht van 2 tot de 3de
Om het grondtal 2 terug te vinden nemen we de 3-machtswortel of ^{3}mw van 8

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$^3\text{mw } 8 = 2$$

Om de exponent 3 terug te vinden nemen we de 2-logaritme van 8

$$^2\log 8 = 3$$

$$\mathbf{3^2 = 9}$$

dan $\sqrt[2]{9} = 3$ of ^{2}mw 9 = 3
en $^3\log 9 = 2$

De **logaritme** van 125 met grondtal 5 = de **exponent** die je boven het grondtal 5 moet zetten om 125 te bekomen = 3, want $5^3 = 125$

$$^5\log 125 = 3$$

Algemeen.
De **logaritme** van een getal c met grondtal a is de **exponent** b die je boven het grondtal a moet zetten om het getal c te bekomen:

$$^a\log c = b \text{ als en slechts als } a^b = c$$

Omdat in de meeste toepassingen de logaritme met grondtal 10 wordt gebruikt, wordt in dat geval het grondtal weggelaten.
Dus: $^{10}\log 100 = \log 100 = 2$, want $100 = 10^2$
En: $\log 0{,}001 = -3$, want $0{,}001 = 10^{-3}$
$\log 600 = 2{,}78$, want $600 = 10^{2{,}78}$
$\log 0{,}056 = -1{,}25$, want $0{,}056 = 10^{-1{,}25}$

Waarvoor worden logaritmen in de praktijk gebruikt?
Algemeen, als bepaalde meetresultaten of waarden van natuurverschijnselen verspreid zijn over ver uit elkaar lopende getallen.
Stel dat de waarden kunnen schommelen tussen 10 en 1 miljard.

waarden	als machten van 10	logaritmische schaal
10	10^1	1
1 000	10^3	3
1 000 000	10^6	6
1 000 000 000	10^9	9

Het is veel eenvoudiger om in praktische gevallen de logaritme te vermelden dan de werkelijke waarden.

waarde	op de logaritmische schaal
5 298	3,72
71 096 300	7,85
284 265 987	8,45

Bij het gebruik van de logaritmische schaal met grondtal 10 moet men er wel rekening mee houden dat als de waarde op de logaritmische schaal met 1 toeneemt (afneemt) de werkelijke waarde met factor 10 toeneemt (afneemt).

logaritmische schaal	waarde
1,23	16,98
2,23	169,82
7,00	10 000 000
6,00	1 000 000

Praktische toepassingen.

1.Geluidsniveau.

Aantal dB (decibel) = 10 x aantal Bel = 10 x log $\left(\frac{I}{I_0}\right)$ dB
waarbij I de waargenomen geluidsintensiteit is en I_0 de referentie intensiteit is; dit is de intensiteit van een zeer stil, nauwelijks waarneembaar geluid (ongeveer 10 keer sterker dan de geluidsdrempel van een jong persoon met een goed gehoor).

Deze verhouding kan liggen tussen 0,1 en ca. 1 000 000 000 000 000 .

Dit zijn zeer grote getallen die moeilijk voorstelbaar zijn.

Stel dat een geluid 10 000 sterker dan het referentiegeluid, dan is het aantal decibel gelijk aan 10 x log 10 000 = 10 x log 10^4 = 10 x 4 dB = 40 dB
Het is veel handiger om het aantal dB te noemen dan de verhouding van de geluidsintensiteit t.o.v. de referentieintensiteit.

Een geluid van 90 dB (9,0 Bel) is 10^9 = 1 miljard keer luider dan het referentiegeluid.

Een geluid van 93 dB (9,3 Bel) is $10^{9,3}$ = 1 995 262 315 = ca. 2 miljard keer luider dan het referentiegeluid.

Een toename van 3 dB wil dus zeggen dat de geluidsintensiteit is verdubbeld (dubbel zo schadelijk voor onze oren).
Enkele voorbeelden.

	Verhouding I / I_0	dB
geluidsdrempel jong persoon	0,1 = 10^{-1}	-10
koelkast	30 000 = 3.10^4	45
stofzuiger	10 000 000 = 10^7	70
boormachine	500 miljoen = 5.10^8	87
opstijgende F-16	300 miljard = 3.10^{11}	115
overvliegende F-35	1000 miljard = 10^{12}	120

De geluidsintensiteit van een overvliegende F-35 is dus meer dan 3 keer groter dan van een opstijgende F-16

2. Een toepassing uit de chemie is de zuurtegraad, de pH
(**p**otentia **H**ydrogenium, of “de kracht van waterstof-ionen”).
De zuurtegraad van een oplossing wordt bepaald door de concentratie van de waterstofionen [H^+].
Deze varieert in de meeste gevallen van 10 tot 0,000 000 000 000 001 mol/liter, of van 10^1 tot 10^{-14} mol/liter.

Omdat deze exponenten dus bijna altijd negatief zijn, neemt men als pH het tegengestelde van de exponent, dus de pH van een vloeistof = **-** log(concentratie van de waterstofionen) = - log [H^+].

[H^+] = concentratie van de waterstofionen in mol / l		pH
10 = 10^1	Zeer sterk zuur	-1
1 = 10^0	Zeer sterk zuur	0
0,001 = 10^{-3}	Sterk zuur	3
0,000 001 = 10^{-6}	Zwak zuur	6
0,000 000 1 = 10^{-7}	Neutraal (water)	7
0,000 000 001 = 10^{-9}	Zwak basisch	9
0,000 000 000 000 1 = 10^{-13}	Sterk basisch	13

De pH is in de chemie o.a. belangrijk bij neutralisatiereacties en om het verloop van bepaalde reacties te beïnvloeden.

Wanneer een eigenschap toeneemt, neemt normaal ook het maatgetal toe.
Een voorwerp van 4 m is ***langer*** *dan een voorwerp van 3m*
Een persoon van 80 kg is ***zwaarder*** *dan een persoon van 70 kg*
Een geluid van 93 dB is ***luider*** *dan een geluid van 90 dB*
Maar dit klopt niet voor de zuurtegraad:
Een oplossing met pH 4 is ***minder zuur*** *dan een oplossing met pH 3*
Verklaar.

3. De schaal van Richter.

Nog een mooi en laatste voorbeeld van het gebruik van de logaritmische schaal is de schaal van Richter voor het uitdrukken van de sterkte van een aardbeving.

Bij de zware aardbeving in Haïti van 2021 kwam er een energie vrij van ca. 400.10^{15} joule, bij de aardbeving in Midden-Italië in 2013 kwam 20.10^{15} joule vrij en bij de lichte aardbeving in 1992 in onze streek met epicentrum in Roermond kwam 3.10^{15} joule vrij.
Zo'n 50 000 keer per jaar komen er lichte aardschokken voor met een energie tussen 2.10^{11} en 6.10^{12} joule.

Omdat deze getallen moeilijk voor te stellen zijn, drukt men de sterkte van een aardbeving uit met het begrip magnitude M met

$$M = \frac{\log\left(\frac{E}{10^{6,8}}\right)}{1,5}$$

Seismoloog Charles Francis Richter heeft dat in 1935 zo bepaald.

Met deze omzetting spreekt men respektievelijk van een aardbeving met een magnitude van 7,2 (Haïti), 6,3 (Midden-Italië) en 5,8 (Roermond). De talrijke lichte aardschokken hebben een magnitude tussen 3 en 4.

Deze getallen zeggen ons meer dan de grote energiewaarden.
Let wel: als de magnitude van de aardbeving met 1 toeneemt, zal de vrijgekomen energie toenemen met een factor van iets meer dan 31 (= $10^{1,5}$)

4. Enkele eigenschappen van logaritmen.

$^a\log(p.q) = {}^a\log p + {}^a\log q$, want $a^p . a^q = a^{p+q}$
lees : de exponent van het product van twee getallen met hetzlfde grondtal is de som van hun exponenten.
$^a\log(p/q) = {}^a\log p - {}^a\log q$, want $a^p / a^q = a^{p-q}$
lees : de exponent van het quotiënt van twee getallen met hetzlfde grondtal is het verschil van hun exponenten.
$^a\log p^n = n.{}^a\log p$, want $a^{p.n} = (a^p)^n = a^p . a^p . \ldots a^p$; met n factoren)

5. Een beetje geschiedenis.

Voordat er elektronische rekenmachientjes op de markt waren (ca. 1975) werden logaritmen gebruikt vooral voor het berekenen van wiskundige bewerkingen.
Dit was gebaseerd op de bovenstaande eigenschappen van logaritmen.
Hiervoor werd gebruik gemaakt van de "Logaritmetafels", een boekje met een tabel met de logaritme van 1,00000 tot 9,99999 met 10 als grondtal (het grondtal 10 wordt niet geschreven) .
Er wordt enkel rekening gehouden met de beduidende cijfers van de getallen; machten van 10 en dus het plaatsen van de komma moet men zelf aanpassen.

Om bijvoorbeeld de zevende-machtswortel te trekken uit een getal gaan we te werk als volgt (voor de vet, cursief resultaten worden de logaritmetafels gebruikt) :

$x = \sqrt[7]{200}$

$\log x = \log \sqrt[7]{200} = \log 200^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log 200 = \frac{1}{7} \log(100.2) =$
$\frac{1}{7}(\log 100 + \boldsymbol{\mathit{\log 2}}) = \frac{1}{7}(2 + \boldsymbol{\mathit{0{,}30103}}) = \frac{1}{7} . 2{,}30103 = 0{,}32872$

Dan is $x = \sqrt[7]{200} = \boldsymbol{\mathit{10^{0{,}32872} = 2{,}1317}}$

G	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
203	750	771	792	814	835	856	878	899	920	942
204	963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154
205	31 175	197	218	239	260	281	302	323	345	366
206	387	408	429	450	471	492	513	534	555	576
207	597	618	639	660	681	702	723	744	765	785
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
209	32 015	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210	222	243	263	284	305	325	346	366	387	408
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224

Evenr. delen

	22	21
1	2,2	2,1
2	4,4	4,2
3	6,6	6,3
4	8,8	8,4
5	11,0	10,5
6	13,2	12,6
7	15,4	14,7
8	17,6	16,8
9	19,8	18,9

In de tabel staat in het rood, ovaal omringd, het getal waarvan de logaritme wordt genomen (met 10 als grondtal). In het geel staat de logaritme = de exponent die bij het grondtal 10 hoort om het getal in het rood te bekomen.
Als dan de exponent gekend is, kan men omgekeerd vijf beduidende cijfers van de berekening terug vinden (vierkant omringd).
In de linkerkolom staan de eerste drie cijfers, in de koprij staat het vierde cijfer. Met het eventuele vijfde cijfer kan met een rechterkolom met evenredige delen rekening gehouden worden. De logaritme, dus de exponent vindt men dan in de tabel.

Nog een voorbeeld : $x = \sqrt[5]{65{,}32.\,10^7}$

$\log x = \log \sqrt[5]{65{,}32.\,10^7} = \log\,(6{,}532.\,10^8)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}.\,(\boldsymbol{\log 6{,}532} + \log 10^8)$

$\frac{1}{5}.(\,\boldsymbol{0{,}81505} + 8) = 1{,}76301$

G	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Evenr. delen
650	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351	
651	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418	
652	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485	
653	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551	
654	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617	
655	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684	

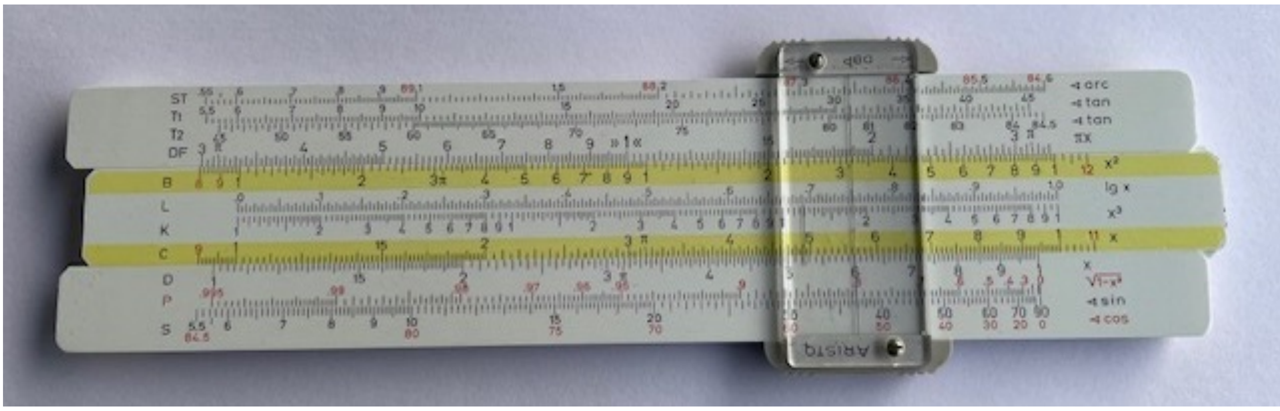
Dan is x = $10^{1{,}76301} = 10^1.\boldsymbol{10^{0{,}76301}} = 10\ .\ \boldsymbol{5{,}7944} = 57{,}944$

G	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
575	967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035
576	76 042	050	057	065	072	080	087	095	103	110
577	118	125	133	140	148	155	163	170	178	185
578	193	200	208	215	223	230	238	245	253	260
579	268	275	283	290	298	305	313	320	328	335

Evenr. delen

	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

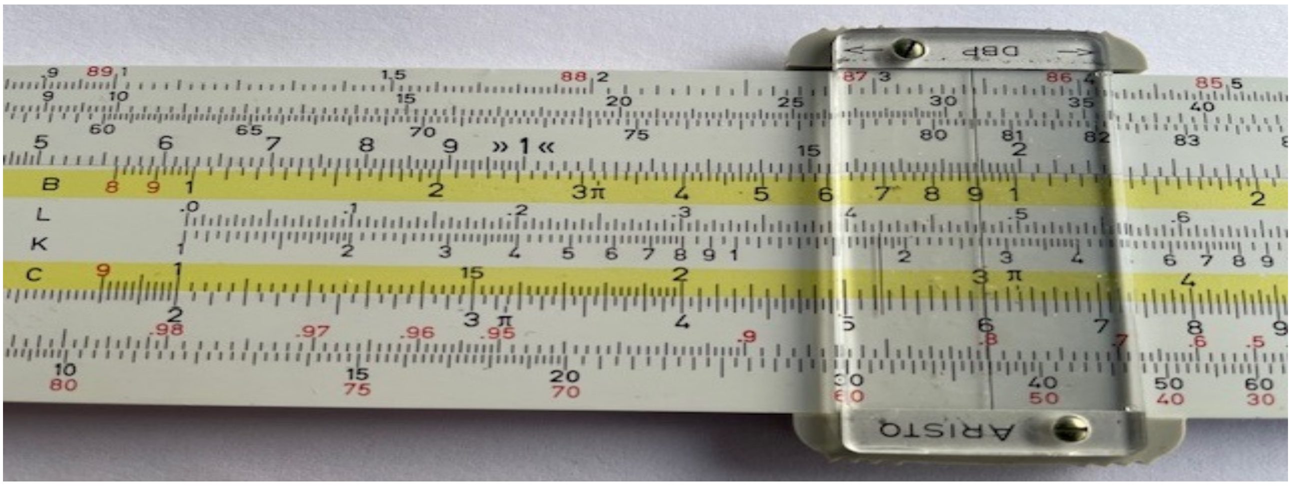
Een handigere maar iets minder nauwkeurige methode was het gebruik van de "rekenlineaal".

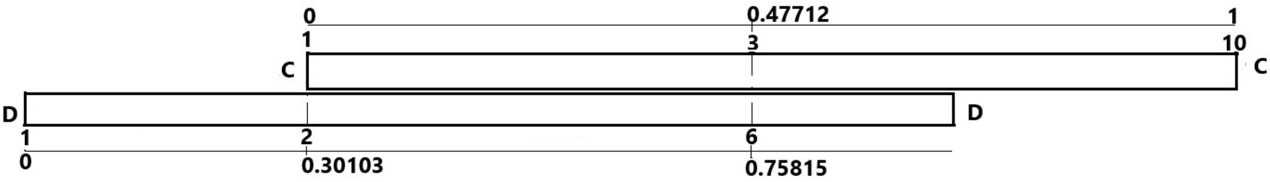


Hiermee kan men (buiten andere bewerkingen zoals goniometrische getallen, omgekeerden, veelvouden van π en e-machten) het product en het quotiënt van getallen aflezen door het middenste latje C te schuiven over het vaste latje D.

De cijfers 1 tot 10 zijn hier niet lineair, maar logaritmisch uitgezet. Het cijfer 1 staat op afstand 0 (= log 1), het cijfer 2 staat op afstand 0,30103 (= log 2), het cijfer 3 op afstand 0,47712 (= log 3), het cijfer 6 staat op afstand 0,77815 (= log 6) en het cijfer 1(0) op afstand 1 (= log 10)

Om 2 te vermenigvuldigen met 3, schuift men het middenste latje C zodat het cijfer 1 boven het cijfer 2 op het latje D staat. Onder het cijfer 3 op latje C leest men het cijfer 6 af op latje D. Dit is inderdaad het product van 2 en 3.

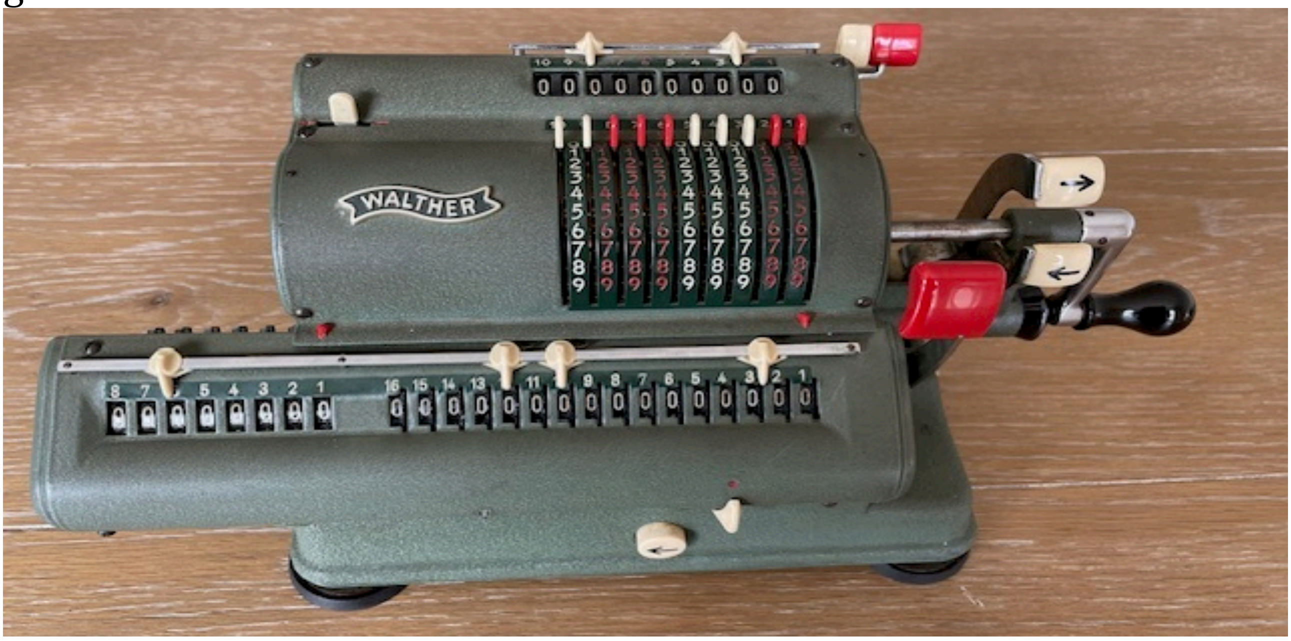




We hebben dit verkregen door de logartime van 2 (0,30103) op te tellen bij de logaritme van 3 (0,47712). Hun som (0,77815) is de logaritme van 6.
Om het product van 2 en 3 te maken, heeft men dus in feite hun logaritmen opgeteld.

Voor het uitvoeren van een deling gaat men ongekeerd te werk. Men plaatst men de deler (3) op C boven het deeltal (6) op D. Het quotiënt (2) leest men onder 1 op C af op D. Op de tekening zie je dus : 6 / 3 = 2
Om te delen heeft men de logaritme van de deler 3 afgetrokken van de logaritme van het deeltal 6, met als resultaat de logaritme van het quotiënt 2.
Op het grote bureaumodel van Aristo (35 cm x 8 cm) kon men met een beetje ervaring resultaten tot op 4 beduidende cijfers aflezen.

En om dit stukje geschiedenis af te sluiten, zie je hier een zeer vernuftig, zuiver mechanisch toestel, dat gebruikt werd voordat het elektronsiche rekentoestel op de markt kwam (ca. 1975) en waarmee men kon optellen en aftrekken, maar ook vermenigvuldigen en delen. Maar men moest wel ongeveer ingenieur zijn om het te kunnen gebruiken.



Leon Lenders