De homografische functie en het gedrag van kraaien.

Leon Lenders, Bree

Extremumprobleem – Opstellen van een functie door regressie – gebruik van grafisch rekentoestel (hier is gebruik gemaakt van de TI-89, uiteraard kan ieder grafisch rekentoestel gebruikt worden)

Kraaien langs de Atlantische kust van Noord-Amerika zijn verlekkerd op een soort weekdier.

Ze moeten echter de harde schelp va n dit weekdier breken om het heerlijke vlees van dit weekdier te kunnen opeten. De gebruikte techniek vereist nogal veel energie : de vogel neemt zijn prooi mee in de lucht en laat die op de rotsen in de nabijheid vallen. Hij pikt zijn prooi opnieuw mee in de lucht en laat die weer vallen, ……. Dit spelletje herhaalt de vogel zo vaak tot de schelp uiteindelijk breekt.

Een zoöloog, die ook wat wiskunde kent, heeft opgemerkt dat de vogels meestal hun prooi laten vallen van een hoogte van ongeveer 5 meter.
Waarom 5 meter?
Zou dat soms de "optimale" hoogte zijn, d.w.z. de hoogte waarmee de door de vogel verbruikte energie om zijn maaltijd te kunnen verorberen minimaal is?

We zullen nagaan hoe de zoöloog (met de TI) heeft aangetoond dat het gedrag van deze kraaien tamelijk optimaal is, en dat deze vogels instinctief ook wel een beetje wiskunde kennen!

We noemen
x : de hoogte waarvan de vogel zijn prooi laat vallen
n : het aantal nodige worpen om de schelp te doen breken
y : de hoeveelheid energie verricht door de vogel om de schelp te breken.

De hoeveelheid energie is evenredig met x en met n. Men mag dus veronderstellen dat
$y = k . n . x$
waarbij k een constante evenredigheidsfactor is, die bij het afleiden geen rol speelt.

We moeten dus bewijzen dat de energie y minimaal is als de hoogte x ongeveer 5 meter is.

y is afhankelijk van 2 variabelen n en x.

Maar n is ook een functie van x. De schelp zal inderdaad vlugger breken, d.w.z. na een kleiner aantal worpen, als ze van hoger valt.

Men moet dus eerst de functie $n(x)$ bepalen.
Daartoe heeft onze zoöloog het volgende experiment uitgevoerd met schelpen.

Hij heeft een aantal schelpen van ongeveer dezelfde grootte genomen en heeft ze laten vallen van verschillende hoogten. Voor elke hoogte heeft hij het gemiddeld aantal worpen, nodig om de schelp te breken, genoteerd.

De resultaten vind je in de volgende tabel :

hoogte in meter	gemidd. aantal worpen
2	55
3	10
4	7,5
5	6
6	5
7	4
8	4
10	3
15	2,5

We voeren deze tabel in in de TI (**APPS - Data/… - New - kraai**).
De hoogte in **c1**; het aantal worpen in **c2**.

We maken een plot (**F2**(setup) **- F1**(define)) van n in functie van x.
Pas de Window aan.

Dit is blijkbaar een (positief) deel van een homografische functie.
We bepalen de horizontale en verticale asymptoot van deze functie.

Bij een oneindig grote hoogte moeten we de schelp altijd één keer laten vallen.
We hebben dus een horizontale asymptoot $y = 1$.

Als je de schelp gooit van een hoogte x die kleiner wordt, wordt n groter, maar er zal een hoogte x_0 zijn waarvoor je niet meer voldoende hoog bent om de schelp nog te breken, ook als je ze oneindig keer laat vallen.
We hebben dus een verticale asymptoot $x = x_0$. Deze x_0 is voorlopig nog niet gekend.

We vermoeden dus dat $n(x) = 1 + \dfrac{l}{x - x_0}$.

We moeten nu x_0 en l zo bepalen dat de grafiek van $n(x)$ zo goed mogelijk door de punten van de plot loopt.

Op de TI heb je een aantal regressiemogelijkheden (**F5**) (lineaire, kwadratische, kubische, exponentiële, logaritmische…..), maar geen hyperbolische regressie.

We gaan daarom onze hyperbolische functie transformeren naar een lineaire functie.

$$n = 1 + \frac{l}{x - x_0} \Leftrightarrow n - 1 = \frac{l}{x - x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{n-1} = \frac{1}{l}.(x - x_0)$$

In onze data-tabel berekenen we $\dfrac{1}{n-1}$ door **c3 = 1/(c2-1)** in te geven.

We maken nu een plot van **c3** ($\dfrac{1}{n-1}$) in functie van **c1** (x).

We benaderen nu deze plot door een lineaire regressie (**F5**) en slaan deze functie op in bv. $y1(x)$.

Uit $y1(x) = \dfrac{1}{n-1}$ bereken we nu $n(x) = n = \dfrac{1}{y1(x)} + 1$. We slaan deze functie op in bv. $y2(x)$ en vergelijken met de eerste plot.

Als we deze functie nu met x vermenigvuldigen bekomen we tenslotte de energie (*y)* enkel in functie van de hoogte (*x)*. De factor *k* geven we niet in omdat hij de vorm en de afgeleide van de functie niet beïnvloed. We slaan deze grafiek op in bv. $y3(x)$.

We maken hiervan de grafiek en bepalen het minimum (**F3**).
Maak de juiste keuze voor je Window .
We bepalen het minimum ook exact met behulp van het nulpunt van de afgeleide.

En we stellen vast dat deze kraaien wel degelijk iets van het optimaliseren van functies afweten.