De Wetten van De Morgan aan de hand van het kattenprobleem

Leon Lenders

In het tweede jaar van de tweede graad wordt het onderwerp "Logica" uitvoerig behandeld, met gebruik van waarheidstabellen en met logische poorten als interessante toepassing. In het hoofdstuk "Telproblemen" worden de elementaire bewerkingen uit de verzamelingenleer behandeld. In beide lesonderdelen komen de wetten van De Morgan aan bod.
In de wiskundekalender 2025 van het tijdschrift "New Scientist" vond ik een interessant probleem waarbij ik toevallig op een mooie toepassing op de wetten van De Morgan uitkwam. Ik vond dit een mooie gelegenheid om deze wetten uitvoerig te behandelen met vooral belangrijke toepassingen bij schakelingen met logische operatoren.

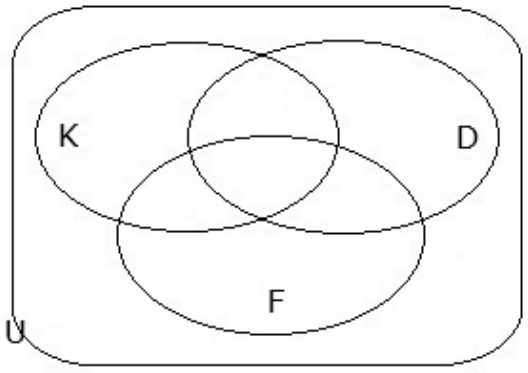
1. Op 25 oktober werd het volgend vraagstuk opgegeven.

In Kitty's huis lopen nogal wat katten rond.
Zeven katten eten geen KitKat.
Zes katten eten geen KatDiner.
Vijf katten eten geen FreshFood.
Vier katten eten noch KitKat noch FreshFood.
Drie katten eten noch KitKat noch KitDiner.
Twee katten eten noch KatDiner noch FreshFood.
Eén kat eet noch KitKat noch KatDiner noch FreshFood.
Geen enkele kat eet alle soorten kattenvoer.
Hoeveel katten heeft Kitty?

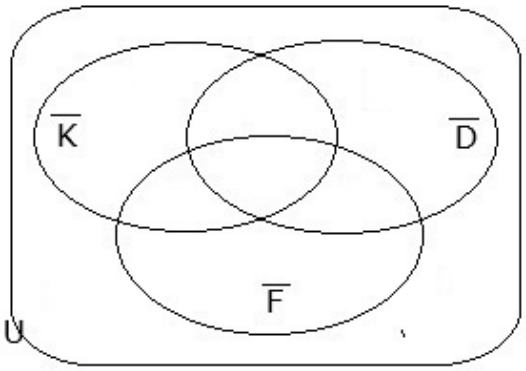
2. Oplossing met venn-diagrammen.

Ik heb dit probleem opgelost door gebruik te maken van een venn-diagram, met de drie verzamelingen: de katten die KitKat eten (K), de KatDiner-eters (D) en de FreshFood-eters (F). Maar toen ik mijn oplossing vergeleek met die van New Scientist vond ik daar op het eerste gezicht een geheel ander venn-diagram. Zij hadden namelijk gebruik gemaakt van de complementen van deze verzamelingen, dus de katten die dit voedsel niet eten. En dit maakte de oplossing inderdaad heel wat eenvoudiger.

We maken gebruik van bijgevoegd schema (Venn-diagram).



K : eten KitKat
D : eten KatDiner
F : eten FreshFood



$\overline{K}$: eten geen KitKat
$\overline{D}$: eten geen KatDiner
$\overline{F}$: eten geen FreshFood

De twee rechthoeken worden verdeeld in acht gebieden.
In het linkse schema staan de verzameling van de katten die iets eten.
In het rechtse schema staan de verzamelingen van de katten die iets **niet** eten (de complementen van de linkse verzamelingen).

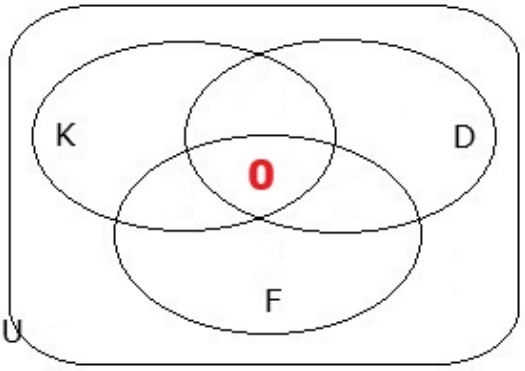
De ring K stelt de verzameling voor van de katten die KitKat eten.
De ring D stelt de verzameling voor van de katten die KatDiner eten.
Het gebied waar deze twee ringen overlappen stelt de deelverzameling voor van de katten die zowel KitKat als KatDiner eten.
Het gebied waar de drie ringen overlappen stelt de deelverzameling voor van de katten die zowel KitKat, KatDiner als FreshFood eten.
Het gebied buiten de 3 ringen stelt de katten voor die niets eten.

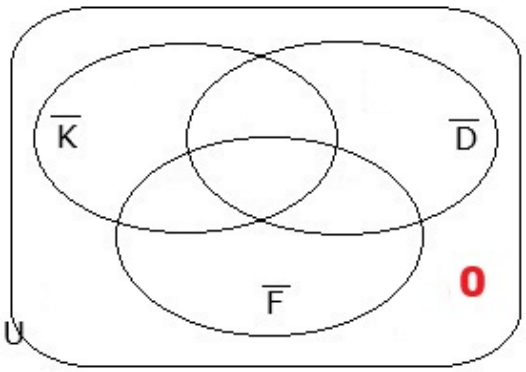
De ring $\overline{K}$ (rechtse chema) stelt de katten voor die geen KitKat eten en het gebied waar $\overline{K}$ en $\overline{D}$ elkaar overlappen stelt de katten voor die noch KitKat noch KatDiner eten.
Buiten deze drie ringen staan de katten die zowel KitKat, KatDiner als FreshFood eten.

Vul in de gebieden de aantallen uit de opgave in, **te beginnen met de laatste regel en zo naar boven**.

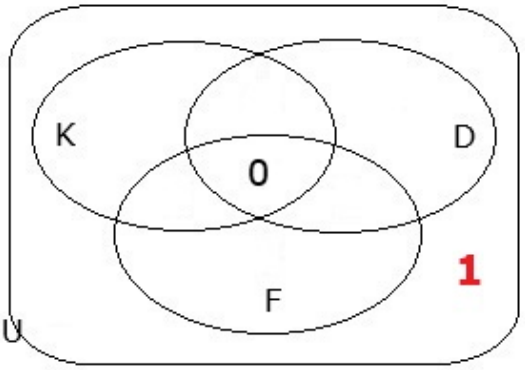
Bij ieder gegeven uit de opgave kun je één van de gebieden invullen. Dit getal is rood vet weergegeven. De getallen die betrekking hebben op de deelverzameling uit het gegeven worden ook in het rood weergegeven.

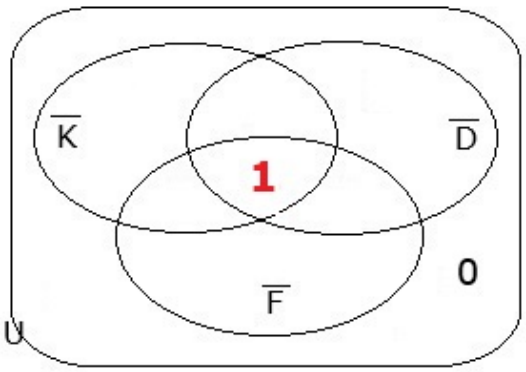
Geen enkele kat eet alle soorten kattenvoer.



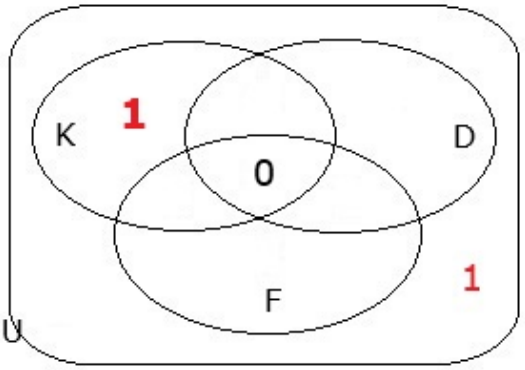


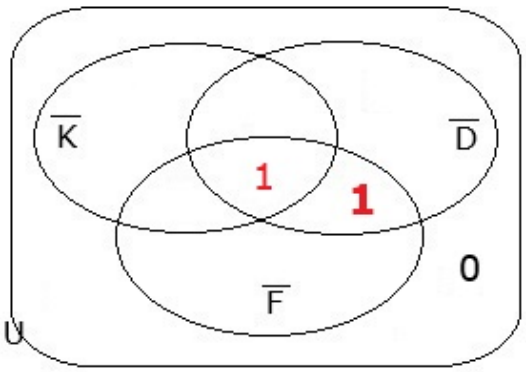
Eén kat eet noch KitKat noch KatDiner noch FreshFood



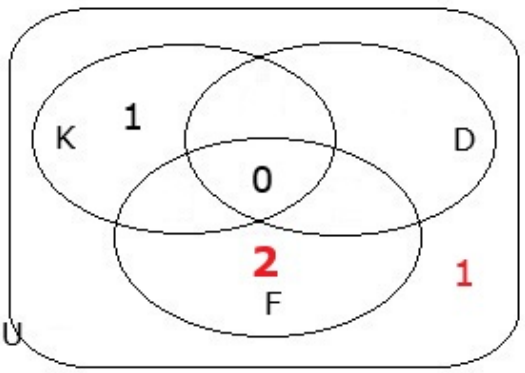


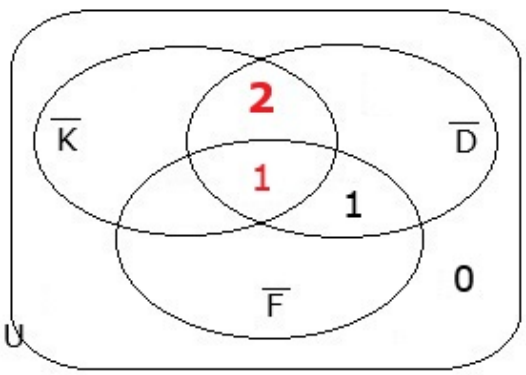
Twee katten eten noch KatDiner noch FreshFood



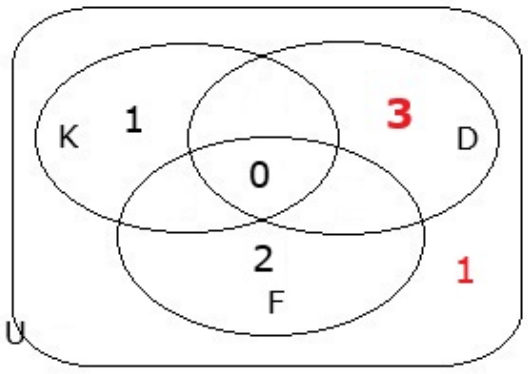


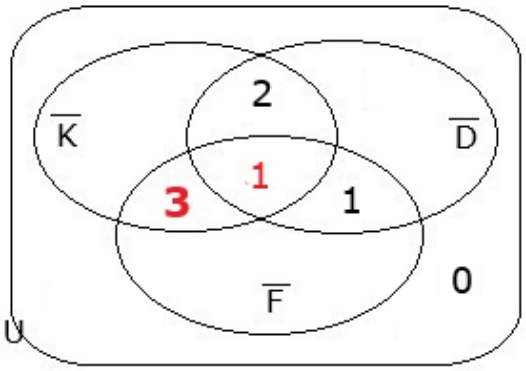
Drie katten eten noch KitKat noch KitDiner



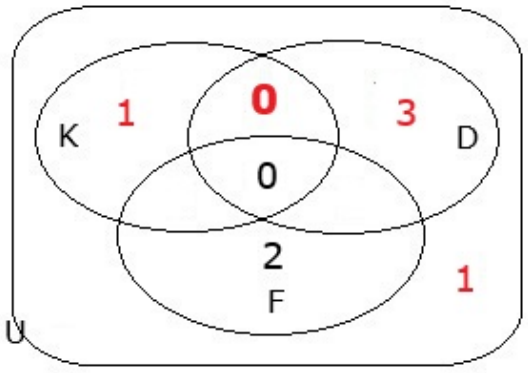


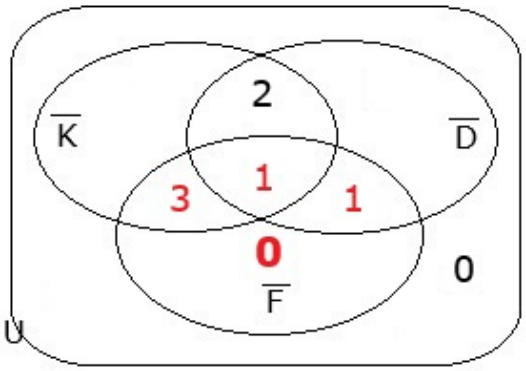
Vier katten eten KitKat noch FreshFood



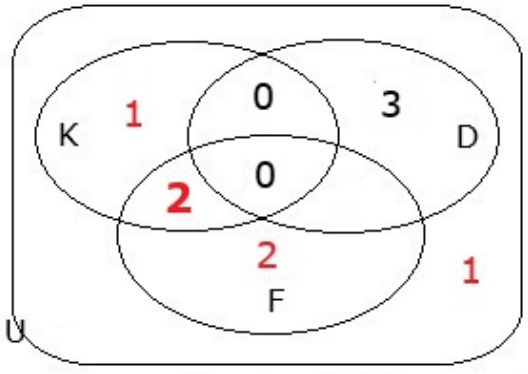


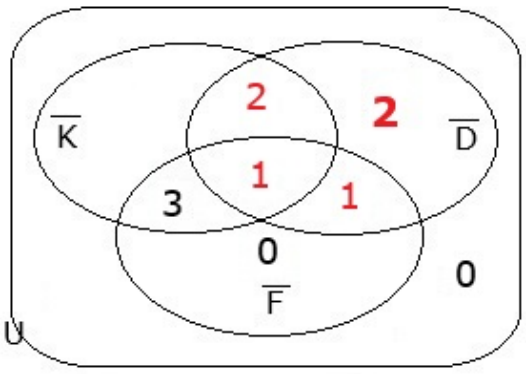
Vijf katten eten geen FreshFood



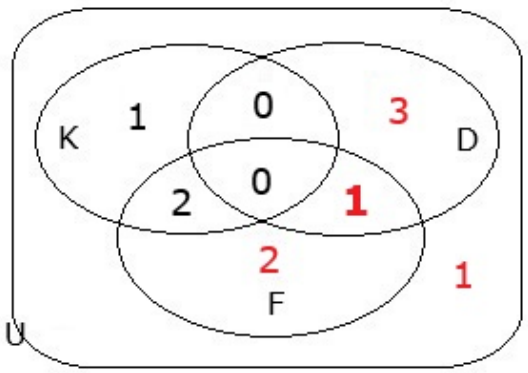


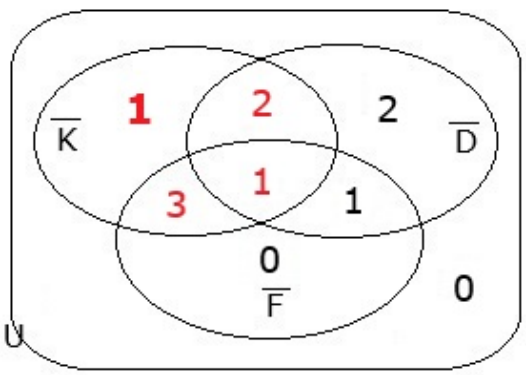
Zes katten eten geen KatDiner



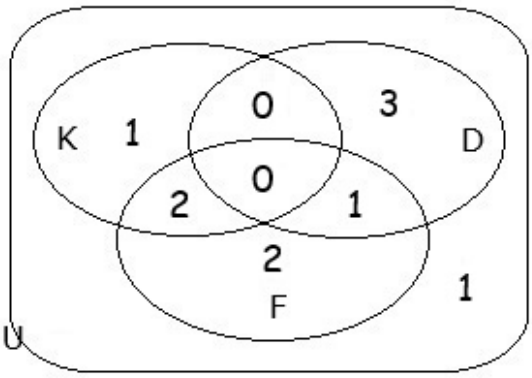


Zeven katten eten geen KitKat

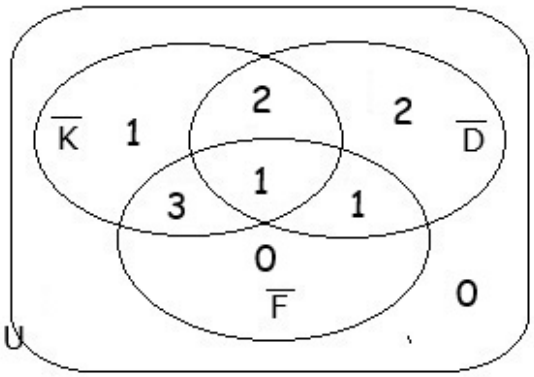




Er zijn dus 10 katten in Kitty's huis.



K : eten KitKat
D : eten KatDiner
F : eten FreshFood



$\overline{K}$: eten geen KitKat
$\overline{D}$: eten geen KatDiner
$\overline{F}$: eten geen FreshFood

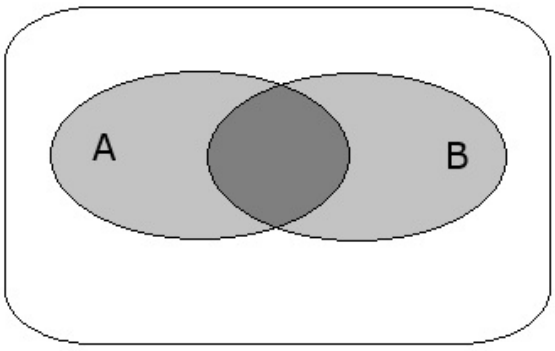
In het linkse schema staan dus de verzameling van de katten die iets eten.
In het rechtse schema staan de verzamelingen van de katten die iets **niet** eten (de complementen van de linkse verzamelingen).

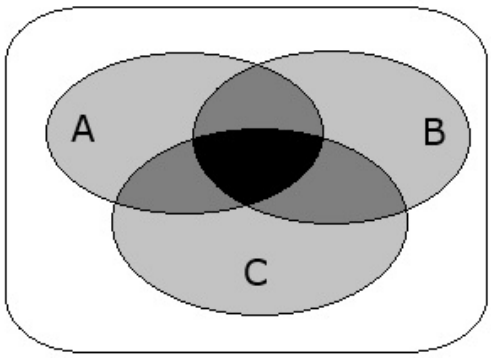
Het antwoord is, of we werken met de verzameling of met de complementen van de verzamelingen, (uiteraard) gelijk aan 10.
Het gebruik van de complementen van de verzamelingen blijkt toch wel het eenvoudigst.

3. Oplossing met de somregel

Het probleem kan ook opgelost worden met de somregel uit de verzamelingenleer.
Voor twee verzamelingen geldt :

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$





en voor drie verzamelingen is dit:

$$\#(A \cup B \cup C) =$$
$$\#A + \#B + \#C - [\#(A \cap B) + \#(B \cap C) + \#(A \cap C)] + \#(A \cap B \cap C)$$

We passen dit toe op de complementen van de verzamelingen en leiden uit de gegevens achtervolgens af:

$$\#\overline{K} = 7\ ;\ \#\overline{D}\ = 6\ ;\ \#\overline{F} = 5$$
$$\#(\overline{K} \cap \overline{F}) = 4\ ;\ \#(\overline{K} \cap \overline{D}) = 3\ ;\ \#(\overline{D} \cap \overline{F}) = 2$$
$$\#(\overline{K} \cap \overline{D} \cap \overline{F}) = 1 \text{ en } \#(\overline{\overline{K} \cup \overline{D} \cup \overline{F}})\ = 0$$

Dus

$$\#(\overline{K} \cup \overline{D} \cup \overline{F})\ = 7\ +\ 6\ +\ 5\ -(4\ +\ 3\ +\ 2)\ +\ 1\ = 10$$

en vermits er geen katten zijn die alle soorten eten

$$\#(\overline{\overline{K} \cup \overline{D} \cup \overline{F}})\ = 0$$

geldt dat het totaal aantal katten gelijk is aan

$$\#U\ =\ \#(\overline{K} \cup \overline{D} \cup \overline{F}) +\ \#(\overline{\overline{K} \cup \overline{D} \cup \overline{F}}) =\ 10\ +\ 0\ =\ 10$$

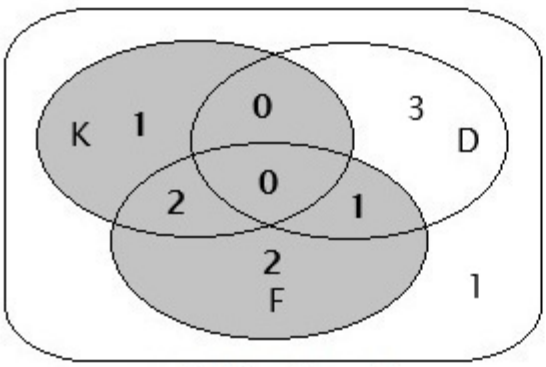
4. De wet van De Morgan

Dit is een mooie gelegenheid om de wetten van De Morgan aan te tonen
Het complement van een unie is gelijk aan de complementen van de doorsneden, $\overline{A\ \cup\ B}\ =\ \overline{A}\ \cap\ \overline{B}$
en (duaal)
het complement van een doorsnede is gelijk aan de complementen van de unies $\overline{A\ \cap\ B}\ =\ \overline{A}\ \cup\ \overline{B}$.

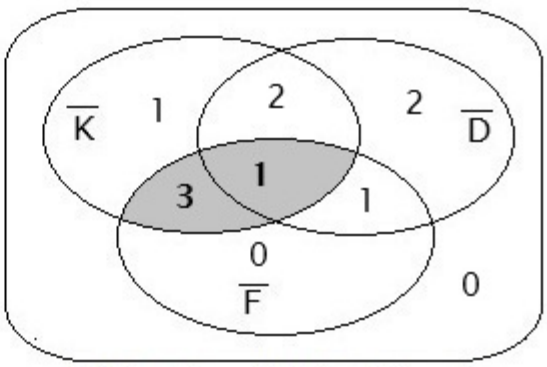
We weten : $\#\mathrm{U} = 10$ en $\#A\ +\ \#\overline{\mathrm{A}} = \#\mathrm{U}$

We kunnen nu aan de hand van deze wet van De Morgan de link leggen tussen mijn oplossing en de oplossing van New Scientist.
Ik geef twee voorbeelden:

$$\#(K \cup F) + \#(K \cup F) = 10$$



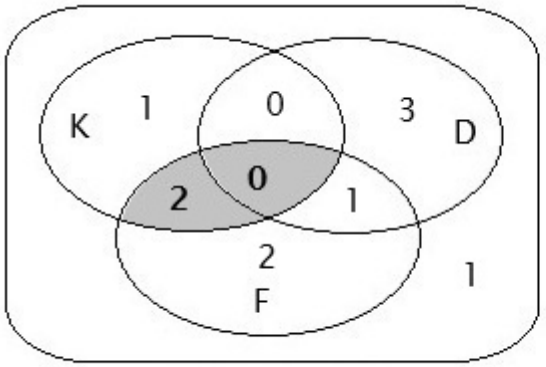
$\#(\mathrm{K} \cup \mathrm{F}) = 6$



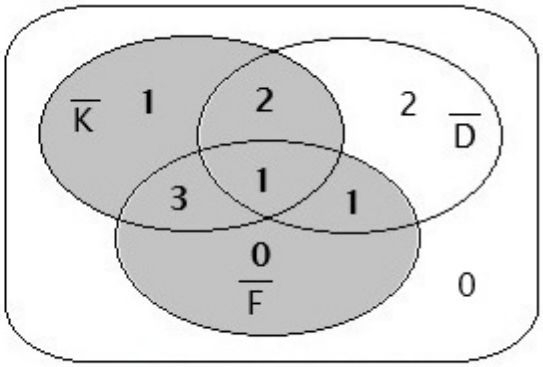
$\#(\overline{\mathrm{K} \cup \mathrm{F}}) = \#(\overline{\mathrm{K}} \cap \overline{\mathrm{F}}) = 4$

en

$$\#(K \cap F) + \#(K \cap F) = 10$$



$\#(K \cap F) = 2$



$\#(\overline{K \cap F}) = \#(\overline{K} \cup \overline{F}) = 8$

We kunnen nagaan dat dit geldt voor alle deelverzamelingen en hun complement:

$$\begin{aligned}
\#K &= 3 & \#\overline{K} &= 7 \\
\#D &= 4 & \#\overline{D} &= 6 \\
\#F &= 5 & \#\overline{F} &= 5 \\
\#(K \cup D) &= 7 & \#(\overline{K \cup D}) &= \#(\overline{K} \cap \overline{D}) = 3 \\
\#(K \cap D) &= 0 & \#(\overline{K \cap D}) &= \#(\overline{K} \cup \overline{D}) = 10 \\
\#(K \cup F) &= 6 & \#(\overline{K \cup F}) &= \#(\overline{K} \cap \overline{F}) = 4 \\
\#(K \cap F) &= 2 & \#(\overline{K \cap F}) &= \#(\overline{K} \cup \overline{F}) = 8 \\
\#(D \cup F) &= 8 & \#(\overline{D \cup F}) &= \#(\overline{D} \cap \overline{F}) = 2 \\
\#(D \cap F) &= 1 & \#(\overline{D \cap F}) &= \#(\overline{D} \cup \overline{F}) = 9 \\
\#(K \cup D \cup F) &= 9 & \#(\overline{K \cup D \cup F}) &= \#(\overline{K} \cap \overline{D} \cap \overline{F}) = 1 \\
\#(K \cap D \cap F) &= 0 & \#(\overline{K \cap D \cap F}) &= \#(\overline{K} \cup \overline{D} \cup \overline{F}) = 10
\end{aligned}$$

De som is dus telkens gelijk aan 10.

5. De wet van De Morgan toegepast op de logica.

$\cup$ is de logische OF
$\cap$ is de logische EN

De negatie van een OF-zin is de EN-zin van de negaties, en
de negatie van een EN-zin is de Of-zin van de negaties.

"Ik ga wandelen of fietsen" is de negatie van "Ik ga niet wandelen en ook niet fietsen".

"Jan en Piet komen beiden" is in tegenspraak met "Jan komt niet of Piet komt niet"

6. De wet van De Morgan met schakelingen

We gebruiken eerst de klassieke serie- en parallelschakeling om de kring visueel beter voor te stellen.

We stellen de serieschakeling voor door de logische EN (AND - conjuctie "∧ ") , de parallelschakeling door de logische OF (OR - disjunctie "∨") en de NIET-schakeling (NOT) door "¬"

De wet van De Morgan luidt dan:
De serieschakeling gevolgd door een niet-schakeling is gelijk aan de parallelschakeling van aparte niet-schakelingen en ook
is de parallel schakeling gevolgd door een niet-schakeling gelijk aan de serieschakeling van aparte niet-schakelingen.

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

a	b	¬a	¬b	a ∧ b	**¬(a ∧ b)**	**¬a ∨ ¬b**	a ∨ b	**¬(a ∨ b)**	**¬a ∧ ¬b**
1	1	0	0	1	**0**	**0**	1	**0**	**0**
1	0	0	1	0	**1**	**1**	1	**0**	**0**
0	1	1	0	0	**1**	**1**	1	**0**	**0**
0	0	1	1	0	**1**	**1**	0	**1**	**1**

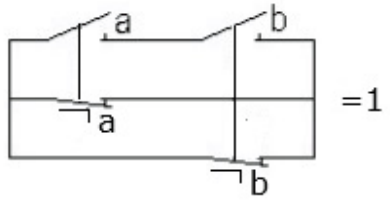
Dit wil ook zeggen dat de serieschakeling van twee schakelaars complementair is aan de parallelschakeling van de niet-schakeling van deze schakelaars en dat de parallelschakeling van twee schakelaars complementair is aan de serieschakeling van de niet-schakeling van deze schakelaars, zodat

$$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = 1 \text{ en } (a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = 0$$

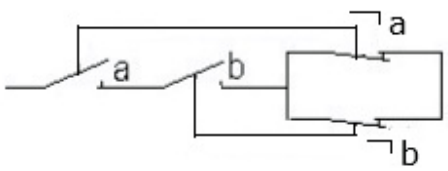
en

$$(a \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg b) = 1 \text{ en } (a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b) = 0$$

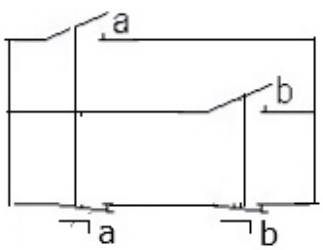
waarbij "1" staat voor een steeds gesloten kring en "0" voor een steeds open kring.



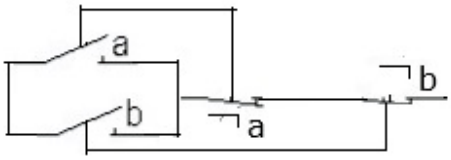
=1



= 0



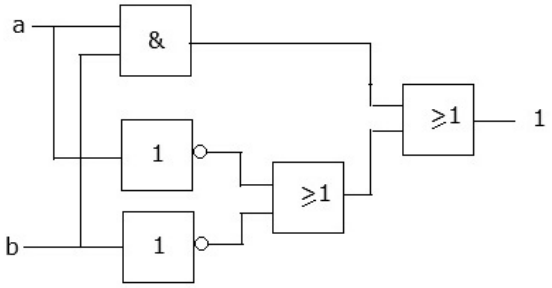
=1

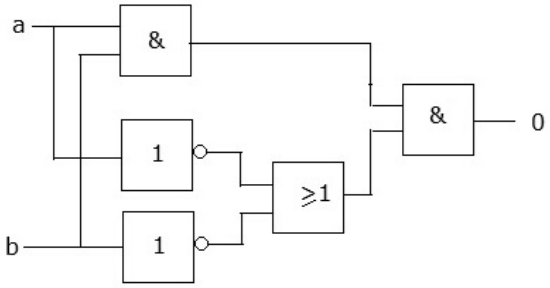


= 0

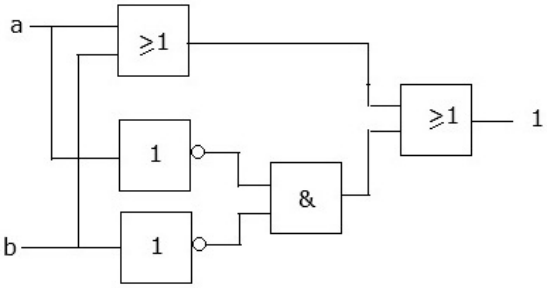
7. De schakelingen met logische poorten

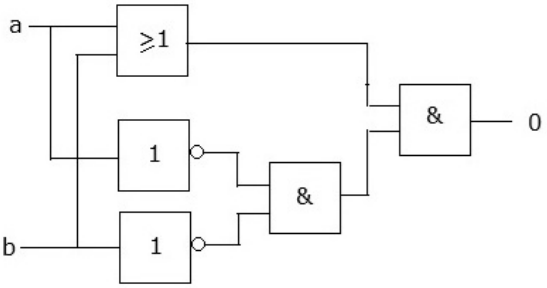
$(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) = 1$ en $(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) = 0$





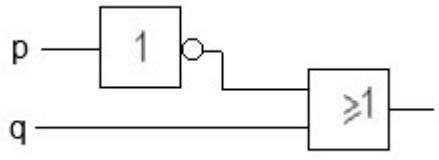
$(a \vee b) \vee (\neg a \wedge \neg b) = 1$ en $(a \vee b) \wedge (\neg a \wedge \neg b) = 0$



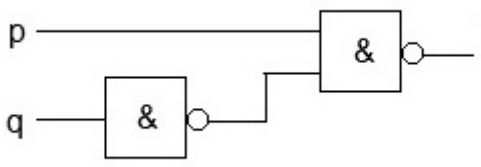


8. Implicatie en equivalentie met NAND-poorten

De wet van De Morgan wordt ook nuttig gebruikt bij het vereenvoudigen van schakelingen, voornamelijk om schakelingen om te vormen tot het gebruik van één soort logische poort, de NAND- of NOR-poort. Dit zijn functioneel volledige poorten, d.w.z. dat de drie logische functies EN, OF en NIET met enkel NAND- of enkel NOR-poorten kan bekomen worden.
De **implicatie** "als p, dan q" wordt uitgedrukt als "niet p of q". Hiervoor zijn twee poorten nodig, een NIET en een OF-poort. Nochtans kan deze functie ook met twee NAND-poorten bekomen worden.



$\neg p \vee q$



$\neg(p \wedge \neg q) = \neg p \vee q$

Voor **de equivalentie** gaan we uit van de exclusieve OF (XOR). De equivalentie namelijk de negatie van de exclusieve OR, dit gemakkelijk aan te tonen met een waardetabel.
Het kan ook bewezen worden met de wet van De Morgan:

$$\neg\{(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)\} = \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) =$$
$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) = \qquad (\wedge \text{ is distr. t.o.v. } \vee)$$

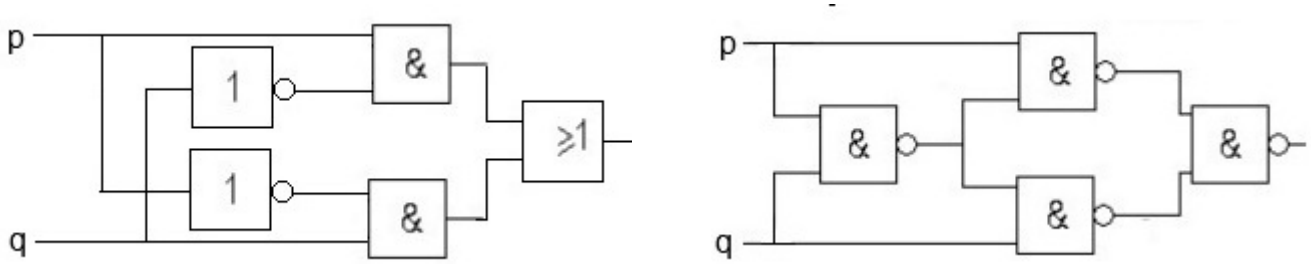
$$(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q) =$$
$$(0) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (0) = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

De equivalentie wordt dan ook voorgesteld als de XNOR-functie

De uitdrukking van de XOR naar enkel NAND-poorten vergt wel enkele omvormingen met telkens toepassingen van de wet van De Morgan :

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) =$$
$$\neg\{\neg[(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)]\} =$$
$$\neg\{\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)\} =$$
$$\neg\{(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)\} = (*)$$
$$\neg\{(\neg p \vee (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge q) \vee \neg q)\} =$$
$$\neg\{[\neg\langle\neg(\neg p \vee (p \wedge q))\rangle] \wedge [\neg\langle\neg((p \wedge q) \vee \neg q)\rangle]\} =$$
$$\neg\{\neg[\, p \wedge \neg(p \wedge q)] \wedge \neg[\neg(p \wedge q) \wedge q]\}$$

(*) $\neg p \vee q = \neg p \vee (p \wedge q)$ en $p \vee \neg q = p \vee \neg q$:
toon aan met waarheidstabel



exclusieve OF (XOR) = $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Voor de equivalentie wordt bij deze schakeling nog met een NAND-poort toegevoegd.

9. Besluit

De wet van De Morgan heeft heel wat toepassingen in verschillende domeinen: wiskundige redeneringen (bewijs door contradictie), verzamelingenleer, in de logica, de logische schakelingen e.a. En vooral bij deze laatste om schakelingen die uit verschillende logische poorten bestaan, om te vormen tot schakelingen met enkel NAND-poorten (of enkel NOR-poorten. Men moet dan maar één soort poort gebruiken en meestal resulteert dit ook in minder poorten.

Meer over logische schakelingen vindt u op deze website (lkwadraat.com)
in de cursus "**Algebra van Boole**", met de NAND-schema's van de wisselschakeling, de kruisschakeling, het optellen en vergelijken van binaire getallen en ketens met memorisatie.