Sparen en lenen

Leon Lenders, Bree

1 Sparen van een eenmalig geldbedrag

Wanneer men bij een bank een geldbedrag op een spaarrekening plaatst, krijgt men daar een vergoeding voor in de vorm van intrest. Stel dat we een kapitaal van 1000 euro sparen gedurende een aantal jaren tegen een intrestvoet van 5 %.
Bij enkelvoudige intrest krijgt men dan per jaar een vergoeding van 50 euro. Het kapitaal groeit dan jaarlijks aan volgens een rekenkundige rij.
In werkelijkheid past men een samengestelde intrest toe. Dit wil zeggen dat men in de loop van een volgend jaar niet alleen intrest krijgt op het oorspronkelijk kapitaal maar ook op de intrest die men de vorige jaren heeft ontvangen.

We maken een tabel met de aangroei van het beginkapitaal.

aantal jaren	kapitaal bij enkelvoudige intrest	kapitaal bij samengestelde intrest
0	1000	1000
1	1050	1000 . 1,05 = 1050
2	1100	1050 . 1,05 = 1000 . $(1,05)^2$ = 1103
3	1150	1158 . 1,05 = 1000 . $(1,05)^3$ = 1158
4	1200	1216 . 1,05 = 1000 . $(1,05)^4$ = 1216
10	1500	1000 . $(1,05)^{10}$ = 1629
n	1000 + 50 . n	1000 . $(1,05)^n$

Bij samengestelde intrest groeit het kapitaal aan volgens een meetkundige rij en is voor de spaarder gunstiger.

De algemene formule is voor de jaarlijke samengestelde intrest is $K_n = K_o.(1+i)^n = K_o.q^n$, waarbij K_o het beginkapitaal, K_n het kapitaal na n jaren, i de intrestvoet is (voor 5 % is i = 0,05) en $q = 1 + i = 1{,}05$ de groeifactor per jaar is.

Vroeger pasten de meeste banken een maandelijkse intrest toe. Bij een maandelijkse intrest krijgt men reeds de volgende maand intrest op de intrest die men de vorige maand heeft gekregen.

De maandelijkse groeifactor is dan $q^{\frac{1}{12}}$ en de formule is dan $K_m = K_o.(1+i)^{\frac{m}{12}} = K_o.q^{\frac{m}{12}}$ met m is het aantal gehele maanden.

Tegenwoordig passen de meeste banken een dagelijkse intrest toe.

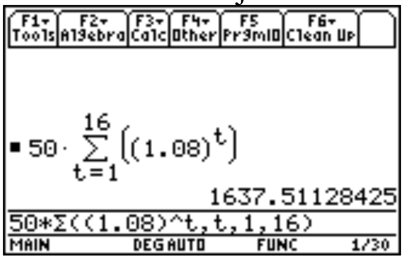
De dagelijkse groeifactor is dan $q^{\frac{1}{365}}$ en de formule is dan $K_d = K_o.(1+i)^{\frac{d}{365}} = K_o.q^{\frac{d}{365}}$ met d is het aantal dagen.

2 Jaarlijks sparen van een vast bedrag

Stel dat je vanaf 14 jaar ieder jaar 50 euro spaart. Als je dit doet tot je 30 jaar bent, hoeveel heb je dan op je spaarboekje staan in de veronderstelling dat gedurende deze hele periode de intrestvoet 8 % is?
Je eerste betaling van 50 euro heeft op het einde 16 jaar intrest opgebracht en heeft dan een waarde van $50.(1{,}08)^{16}$ euro. Zo heeft je tweede betaling op het einde de waarde van $50.(1{,}08)^{15}$ euro. De laatste betaling van 50 euro doe je als je 29 bent en heeft een jaar later een waarde van 50.1,08 euro. Het totale kapitaal is dus :

$$50.\left[(1{,}08)+(1{,}08)^2+(1{,}08)^3+...+(1{,}08)^{15}+(1{,}08)^{16)}\right]=50.\sum_{t=1}^{16}(1{,}08)^t\,.$$

Met de TI-89 kun je deze sommatie uitvoeren via het hoofdscherm (F3Calc – 4:) :



Deze som kan ook berekend worden als de som van de termen van een meetkundige rij ($u_1 = q = 1{,}08$ en $n = 16$) en is gelijk aan :

$$50\,.\,1{,}08\,.\frac{1-(1{,}08)^{16}}{1-(1{,}08)}=50\,.\,32{,}7502=1637{,}51 \text{ euro.}$$

Het gespaarde bedrag van 800 euro (16 maal 50 euro) is dus meer dan verdubbeld.

De algemene formule: voor een jaarlijks kapitaal k dat gedurende n jaren wordt gespaard tegen een intrestvoet van i (= 100.i %) is het eindkapitaal K:

$$K=k.\sum_{t=1}^{n}(1+i)^t=k.(1+i).\frac{(1+i)^n-1}{i}.$$

3 Lenen van een bedrag

Lenen is het omgekeerde van sparen. Je betaalt eveneens jaarlijks (of maandelijks) een vast bedrag. Bij sparen heb je het geld nodig op het einde van een bepaalde periode, bij een lening heb je het geld nodig in het begin van een bepaalde periode.
Voor de berekeningen maken we gebruik van de vorige twee toepassingen. Eerst berekenen we het bedrag dat we zouden gespaard hebben met de jaarlijks gestorte afbetalingen. Daarna beschouwen we dit bedrag als een eindkapitaal, waarvan we nu het beginkapitaal willen hebben.

Stel dat je een voorlopig onbekend bedrag B willen lenen. Om dit geleend bedrag terug te betalen, stort je vanaf volgend jaar - en dit gedurende 16 jaar - 50 euro.
Indien we dit geld zouden gespaard hebben, zouden we na 16 jaar kunnen beschikken over een kapitaal van $50.\sum_{t=0}^{15}(1{,}08)^t=1516{,}21$ euro. Let op de andere begin- en eindwaarde voor t ten opzichte van de formule bij het sparen. Dit komt omdat alle stortingen nu één jaar later gebeuren.

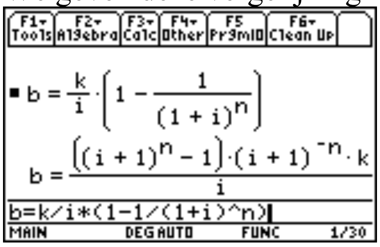
De algemene formule voor dit bedrag wordt $K=k.\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t=k.\frac{(1+i)^n-1}{i}$.

Dit is nu het gespaarde eindbedrag K_n over 16 jaar. Het overeenkomstige beginbedrag K_o=B is het bedrag waarover we nu willen beschikken. Volgens de formule $K_n = K_o.(1+i)^n$ geldt $1516{,}21 = K_o.(1{,}08)^{16}$ waaruit volgt B=K_o = 442,57 euro.

De algemene formule is $B = \dfrac{k.\sum_{t=0}^{n-1}(1+i)^t}{(1+i)^n} = \dfrac{k}{i}.\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} = \dfrac{k}{i}.(1 - \dfrac{1}{(1+i)^n})$ waarbij

B het geleend bedrag is
k het bedrag is van de jaarlijkse afbetalingen
i de intrestvoet is (100.*i* %)
n het aantal jaren is waarover de lening loopt.

We geven deze vergelijking in op de TI-89.



We kunnen nu drie van de vier variabelen (waaronder de intrestvoet *i*) een waarde geven en daaruit de vierde onbekende berekenen (uitgezonderd de intrestvoet *i*). Het toekennen van een waarde kan gebeuren met de ‘STO>’-toets (R8K1) of met de ‘gegeven dat’-toets (R6K1).

We stellen de intrestvoet op 6% (0.06 STO> i).

Welk bedrag kunnen we lenen als we gedurende 20 jaar jaarlijks 5 000 euro terugbetalen?
solve(*kopieer de vergelijking* , b) | k=5000 and n=20
zie fig. 1 (antwoord : 57 350 euro)

Welk bedrag moeten we gedurende 10 jaar jaarlijks betalen om een bedrag van 10 000 euro te lenen?
solve(*kopieer de vergelijking* , k) | b=10000 and n=10
zie fig. 2 (antwoord : 1359 euro)

We willen 15 000 euro lenen en hiervoor jaarlijks 3 000 euro betalen. Hoeveel jaren zal deze lening lopen?
solve(*kopieer de vergelijking* , n) | b=15000 and k=3000
zie fig. 3 (antwoord : gedurende ongeveer 6 jaar)

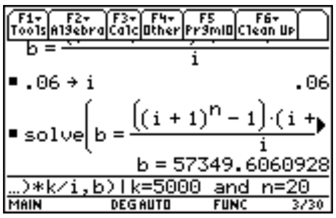


fig. 1

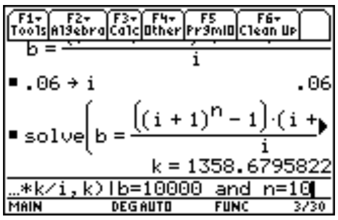


fig. 2

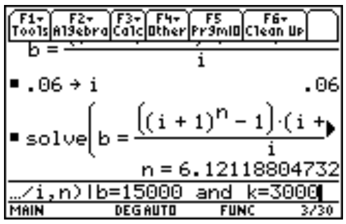


fig. 3