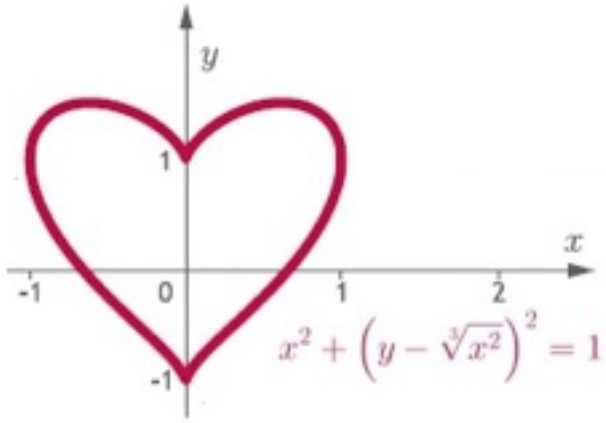


Bepaal de oppervlakte van
nevenstaande figuur

(Antwoord : π)

Dit is de oppervlakte van het gebied ingesloten door de functie**s**(!)

$$x^2 + \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1$$

Uitwerken geeft :

$$\left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1 - x^2$$

$$y - \sqrt[3]{x^2} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

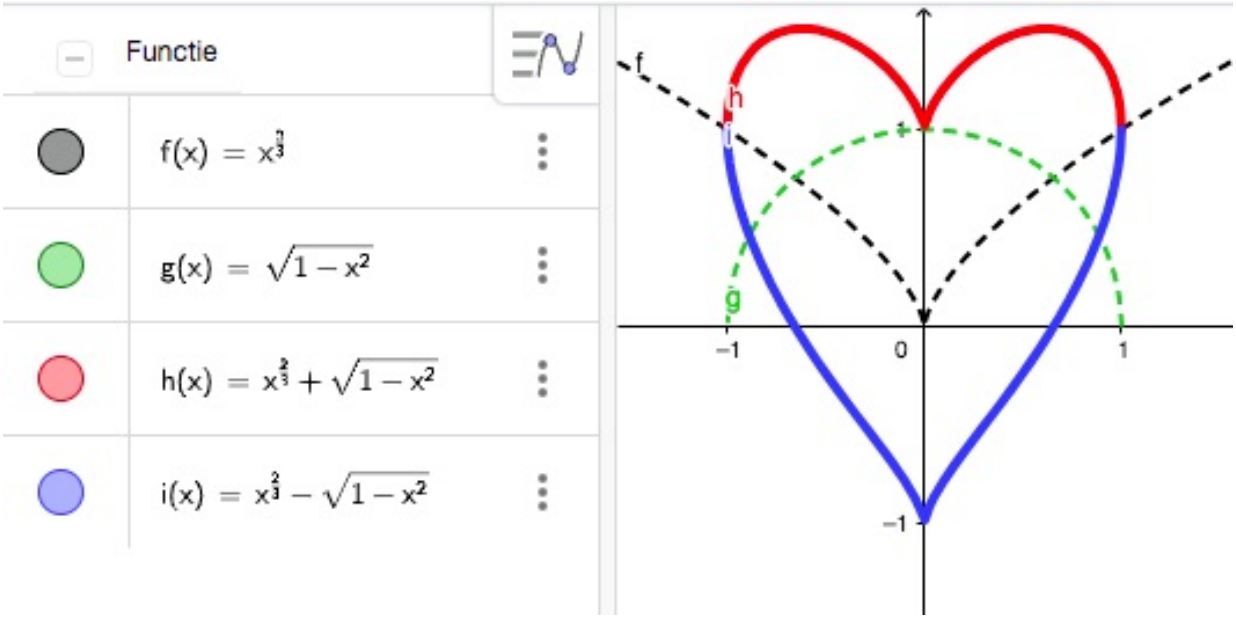
Bovenstaande vergelijking stelt dus inderdaad twee functies voor, namelijk

$$h : y = x^{2/3} + \sqrt{1 - x^2}$$

en

$$i : y = x^{2/3} - \sqrt{1 - x^2}$$

Omwille van de vierkantswortel is het domein van beide functies beperkt tot het interval $[-1\,,1]$. Voor deze grenspunten zijn de beelden van beide functies gelijk aan 1 en krijgen we een aaneengesloten figuur



De oppervlakte begrepen tussen twee functies bepalen we door de integraal van het verschil tussen deze functies te berekenen.

$$h - i = 2\sqrt{1 - x^2} = 2g$$

(Zie afbeelding 2)

De oppervlakte is dus gelijk aan $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-\ x^2}.dx$
Deze integraal kan opgelost worden door een goniometriache substitutie (*)
Deze functie stelt echter twee halve cirkels voor met straal gelijk aan 1. De oppervlakte is dus gelijk aan $2.\frac{\pi r^2}{2} =\ \pi.1^2 =\ \pi$.

Twee besluiten.
1. Dit is weer maar eens een mooi voorbeeld hoe het getal π in zeer veel toepassingen voor komt.

2. Wiskunde kan ook romantisch zijn.
Je maakt een ongelooflijk goede (en zeer intelligente) indruk als je naar je geliefde een kaartje zou sturen met de tekst :

$$\boldsymbol{I\ x^2 + \left(y - \sqrt[3]{x^2}\right)^2 = 1\ \ YOU}$$

in plaats van het saaie

en zeker als je er nog bij vertelt dat je kunt bewijzen dat
de grootte van je liefde gelijk is aan het magishe getal

$$\boldsymbol{\pi}$$

(*) *De gebruikte formule voor de oppervlakte van een cirkel met straal r is afgeleid door de integraal* $2.\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}.dx = 4.\int_{0}^{r}\sqrt{r^2-x^2}.dx$ *op te lossen.*
We doen dit door een goniometrische substitutie en stellen $x = r.\sin\alpha$

$\sqrt{r^2-x^2} = r.\sqrt{1-\ \sin^2}\alpha = r.\cos\alpha$ *en* $dx = r.\cos\alpha\,.d\alpha$

We substitueren ook de grenzen : $x = 0\ \Rightarrow\ \alpha = 0$ *en* $x = r\ \Rightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{2}$
De integraal wordt

$$4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\alpha.d\alpha = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\alpha}{2}d\alpha = 4r^2\left[\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sin 2\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$4r^2\left[\left(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\pi\right) - \left(\frac{1}{2}.0 + \frac{1}{4}\sin 0\right)\right] = 4r^2.\frac{\pi}{4} =\ \pi r^2$$