Kegelsneden in het affiene vlak

Meetkundige plaatsen in het cartesisch vlak

Poolcoördinaten

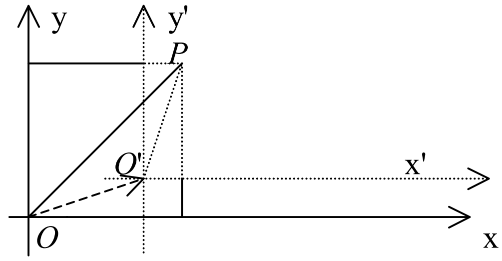
Meetkundige plaatsen in het polair vlak

Leon Lenders

KEGELSNEDEN IN HET AFFIENE VLAK

1 Coördinatentransformaties bij verplaatsing van het assenstelsel

Translatie van het assenstelsel



in xy : co(P) = (x, y)
in x'y' : co(P) = (x', y')

in xy : co(O') = (x_0, y_0)

Translatieformules

Uit de translatie volgt : $\overrightarrow{OE_1} = \overrightarrow{O'E_1'}$ en $\overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{O'E_2'}$ (1)

Dan is

$$\overrightarrow{OO'} = x_0.\overrightarrow{OE_1} + y_0.\overrightarrow{OE_2}$$

$$\overrightarrow{OP} = x.\overrightarrow{OE_1} + y.\overrightarrow{OE_2}$$

$$\overrightarrow{O'P} = x'.\overrightarrow{O'E_1'} + y'.\overrightarrow{O'E_2'}$$

Uit $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$

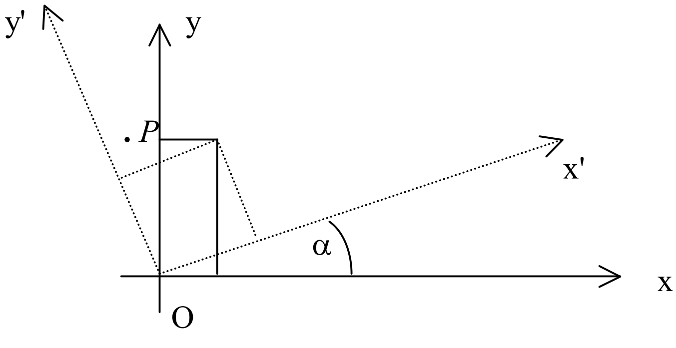
volgt dan

$$x.\overrightarrow{OE_1} + y.\overrightarrow{OE_2} = x_0.\overrightarrow{OE_1} + y_0.\overrightarrow{OE_2} + x'.\overrightarrow{O'E_1'} + y'\overrightarrow{O'E_2'} \underset{(1)}{=} (x_0 + x').\overrightarrow{OE_1} + (y_0 + y').\overrightarrow{OE_2}$$

en dus

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Rotatie van het assenstelsel



in xy : co(P) = (x, y)
in x'y' : co(P) = (x', y')

Rotatieformules

Uit de rotatie volgt :

$$\vec{E}_1' = \vec{E}_1.\cos\alpha. + \vec{E}_2.\sin\alpha$$

$$\vec{E}_2' = \vec{E}_1.\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \vec{E}_2.\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$
$$= -\vec{E}_1.\sin\alpha + \vec{E}_2.\cos\alpha$$

$$\vec{P} = x.\vec{E}_1 + y.\vec{E}_2 = x'.\vec{E}_1' + y'.\vec{E}_2' = x'.\vec{E}_1.\cos\alpha + x'.\vec{E}_2.\sin\alpha + y'.(-\vec{E}_1.\sin\alpha) + y'.\vec{E}_2.\cos\alpha$$
$$= (x'.\cos\alpha - y'.\sin\alpha).\vec{E}_1 + (x'.\sin\alpha + y'.\cos\alpha).\vec{E}_2$$

Dan is dus

$$\begin{cases} x = x'.\cos\alpha - y'.\sin\alpha \\ y = x'.\sin\alpha + y'.\cos\alpha \end{cases} \text{of} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ of } \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

<u>Men kan de translatie en de rotatie tegelijkertijd uitvoeren</u> met volgende formules :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

of

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Algemene vergelijking van een kegelsnede

De algemene vergelijking van een kegelsnede is

$$K \leftrightarrow f(x,y) = 0 \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0 \quad met \quad (a, b'', a') \neq (0,0,0)$$

of

$$K \leftrightarrow f(x,y) = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

(kubische matrixvorm)

of

$$K \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2.\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b' \\ b \end{bmatrix} + a'' = 0$$

of

$$K \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2.\begin{bmatrix} b' & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + a'' = 0$$

(kwadratische matrixvorm)

$\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} = \Delta$ wordt de kubische determinant genoemd.

$\begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix} = \delta$ wordt de kwadratische determinant genoemd.

Voor de canonieke vergelijkingen geldt :

$$E \leftrightarrow Ax^2 + By^2 + C = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ met } \delta > 0 \text{ .}$$

A en B hebben dus hetzelfde teken.

Indien C ook hetzelfde teken heeft als A en B is de ellips leeg (A.Δ > 0).
Indien C het tegengestelde teken heeft van A en B hebben we een (niet-lege) ellips (A.Δ < 0).
Indien C = 0 is de ellips één punt o (0,0) ; Δ = 0 : de ellips is ontaard .

$$H \leftrightarrow Ax^2 + By^2 + C = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ met } \delta < 0 \text{ .}$$

A en B hebben dus het tegengesteld teken.
Indien C = 0 is de hyperbool de unie van 2 rechten door de oorsprong ; Δ = 0 : de hyperbool is ontaard .

$$P \leftrightarrow y^2 - 2px = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

of

$$P \leftrightarrow x^2 - 2py = 0 \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p \\ 0 & -p & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Indien $p \neq 0$ hebben we een (niet-ontaarde) parabool.
Indien $p = 0$ is de parabool de unie van 2 evenwijdige (samenvallende) rechten ; Δ = 0 : de parabool is ontaard .

3 Canoniek maken van een vergelijking van een kegelsnede

Met de volgende twee eigenschappen kan men de algemene vergelijking van de niet-ontaarde kegelsneden canoniek maken.
We zullen aantonen dat de waarde van de kwadratische determinant δ en van de kubische determinant Δ hierbij niet zullen veranderen.

Eigenschap 1
De termen van de eerste graad van de vergelijking van een kegelsnede kunnen verdwijnen door een gepaste translatie van het assenstelsel.

Stel $K \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$
en $O'(x_o, y_o)$ is de nieuwe (nog onbekende) oorsprong.

Met de translatieformules vinden we

$$K \leftrightarrow a(x_0 + x')^2 + 2b''(x_0 + x')(y_0 + y') + a'(y_0 + y')^2 + 2b'(x_0 + x') + 2b(y_0 + y') + a'' = 0$$

$$\begin{aligned} K \leftrightarrow\ & a{x_0}^2 + 2ax_0x' + ax'^2 + 2b''x_0y_0 + 2b''x_0y' + 2b''y_0x' + 2b''x'y' \\ & + a'{y_0}^2 + 2a'y_0y' + a'y'^2 + 2b'x_0 + 2b'x' + 2by_0 + 2by' + a'' = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K \leftrightarrow\ & ax'^2 + 2b''x'y' + a'y'^2 + 2(ax_0 + b''y_0 + b')x' + 2(b''x_0 + a'y_0 + b)y' \\ & + a{x_0}^2 + 2b''x_0y_0 + a'{y_0}^2 + 2b'x_0 + 2by_0 + a'' = 0 \end{aligned}$$

Om de nieuwe oorsprong $O'(x_o, y_o)$ te vinden moeten we het stelsel $\begin{cases} ax + b''y + b' = 0 \\ b''x + a'y + b = 0 \end{cases}$

oplossen. Dit kan slechts als $\delta = \begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix} \neq 0$, dus voor de ellips en de hyperbool.

Deze nieuwe oorsprong noemen we het middelpunt van de kegelsnede. De ellips en de hyperbool worden daarom middelpuntskegelsneden genoemd.

De nieuwe vergelijking van K wordt dan

$K \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + f(x_0, y_0) = 0$ (herlettering voor x en y !)

Merk op dat de kwadratische matrix en dus ook de kwadratisch determinant niet veranderd is.

<u>Eigenschap 2</u>

De term in xy van de vergelijking van een kegelsnede kan verdwijnen door een gepaste rotatie van het assenstelsel.

Stel $\quad K \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2.\begin{bmatrix} b' & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + a'' = 0 \quad met \quad b'' \neq 0$

We passen de rotatieformules toe :

$$K \leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 2.\begin{bmatrix} b' & b \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + a'' = 0$$

De nieuwe kwadratische matrix wordt (we bepalen enkel de nieuwe b'')

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a.\cos\alpha + b''.\sin\alpha & b''.\cos\alpha + a'.\sin\alpha \\ -a.\sin\alpha + b''.\cos\alpha & -b''.\sin\alpha + a'.\cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -a\cos\alpha\sin\alpha - b''\sin^2\alpha + b''\cos^2\alpha + a'\cos\alpha\sin\alpha \\ -a\cos\alpha\sin\alpha + b''\cos^2\alpha - b''\sin^2\alpha + a'\cos\alpha\sin\alpha & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

De nieuwe b" = $-(a-a')\cos\alpha\sin\alpha + b''(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

Deze is nul $\Leftrightarrow 2b''\cos 2\alpha = (a-a')\sin 2\alpha \Leftrightarrow \tan 2\alpha = \dfrac{2b''}{a-a'}$

Hieruit kan men de gepaste rotatiehoek berekenen (indien $a = a'$ is de rotatiehoek = $\dfrac{\pi}{4}$) .

Merk op dat de kwadratische determinant niet veranderd is, want

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix} .1 = \begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix} .$$

Merk op dat de kubische determinant niet verandert bij translatie, rotatie of bij beide transformaties :

$$K \leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ wordt}$$

$$K \leftrightarrow \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

en men kan gemakkelijk nagaan dat de nieuwe kubische determinant gelijk is aan

$1. \begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix} .1$ en dus gelijk is aan de oorspronkelijke determinant.

Bij een ellips en hyperbool voeren we eerst een translatie naar het middelpunt uit en daarna een rotatie over de geschikte hoek.
Bij een parabool voeren we eerst de rotatie uit. Omdat hierbij b'' wegvalt, zal ook a of a' wegvallen ($\delta = 0$). Daarna voeren we de translatie zo uit dat de vergelijking canoniek wordt (volledig kwadraat maken).

Voorbeelden

Maak volgende vergelijkingen canoniek :

$a) K \leftrightarrow x^2 + xy + y^2 - 6x - 3 = 0$

$b) K \leftrightarrow 4x^2 - 20xy - 11y^2 + 36x - 18y - 99 = 0$

$c) K \leftrightarrow 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 10x + 55y + 75 = 0$

$d) K \leftrightarrow 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 9x + 12y - 40 = 0$

Oefeningen

1 Maak volgende vergelijkingen canoniek :

$a) K \leftrightarrow 4x^2 + y^2 - x - 8y + 2 = 0$

$b) K \leftrightarrow x^2 - 16y^2 - 25x + 81y - 15 = 0$

$c) K \leftrightarrow xy + 8x - 7y - 3 = 0$

$d) K \leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$

$e) K \leftrightarrow x^2 - 4y^2 + 8x - 4y - 11 = 0$

2 Maak volgende vergelijkingen canoniek :

$a) K \leftrightarrow x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 3y - 2 =$

$b) K \leftrightarrow x^2 + 4xy - y^2 - 3x - 2y - 1 = 0$

$c) K \leftrightarrow x^2 - 4xy - 4y^2 - 3x - 2y - 2 = 0$

$d) K \leftrightarrow 2x^2 + 4xy - 4y^2 - x + y - 1 = 0$

$e) K \leftrightarrow 20x^2 + 24xy + 27y^2 + 24x + 54y - 212 = 0$

$f) K \leftrightarrow 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 8y + 11 = 0$

3 Bepaal voor elk van de volgende parabolen de coördinaat van de top, brandpunt, de vergelijking van de as en de vergelijking van de richtlijn:

$a) P \leftrightarrow y^2 = 12x$

$b) P \leftrightarrow x^2 = -20y$

$c) P \leftrightarrow x^2 - 6y + 8x + 16 = 0$

$d) P \leftrightarrow x^2 - 9x + 2y + 36 = 0$

$e) P \leftrightarrow y^2 - 2y - 6x - 37 = 0$

$f) P \leftrightarrow y^2 - 20x - 4y - 70 = 0$

4 Bepaal de vergelijking van de parabool als

a) top $T(0,0)$ en brandpunt $B(-4,0)$

b) top $T(0,0)$ en brandpunt $B(0,8)$

c) top $T(0,0)$ en richtlijn $x = 4$

d) top $T(0,0)$, richtlijn door (-1,3) en brandpunt op de y-as

e) brandpunt $B(2,1)$ en richtlijn $x + 4 = 0$

5 Bepaal voor elk van de volgende ellipsen de coördinaat van de toppen, brandpunten, de vergelijking van de bijbehorende richtlijnen, de vergelijkingen van de assen en de excentriciteit:

$a) E \leftrightarrow 4x^2 + 16y^2 - 64 = 0$

$b) E \leftrightarrow 16x^2 + 9y^2 - 25 = 0$

$c) E \leftrightarrow x^2 + 16y^2 + 4x - 32y - 28 = 0$

$d) E \leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 - 18y - 16 = 0$

$e) E \leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$

$f) E \leftrightarrow x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$

6 Bepaal de vergelijking van de ellips als

a) (4,0) en (-4,0) toppen zijn en de kleine as 8 lang is
b) een top op (0,9) ligt, een brandpunt op (0,-8) en het middelpunt op (0,0)
c) de brandpunten (5,0) en (-5,0) zijn en de excentriciteit e = 0,75 is
d) de toppen op (9,3) en (-5,3) liggen en een brandpunt op (-3,3)
e) de richtlijnen y = 8 en y = -4 zij, een hoofdas x = -2 is en de excentriciteit e = 0,75

7 Bepaal voor elk van de volgende hyperbolen de coördinaat van de toppen, brandpunten, de vergelijking van de bijbehorende richtlijnen, de vergelijkingen van de assen en de excentriciteit:

$a) H \leftrightarrow 4x^2 - 16y^2 - 64 = 0$

$b) H \leftrightarrow 16x^2 - 9y^2 - 25 = 0$

$c) H \leftrightarrow x^2 - 16y^2 + 4x - 32y - 28 = 0$

$d) H \leftrightarrow 4x^2 - 9y^2 - 18y + 27 = 0$

$e) H \leftrightarrow 9x^2 - 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$

$f) H \leftrightarrow x^2 - 2y^2 + 4x - 12y + 18 = 0$

8 Bepaal de vergelijking van de hyperbool als

a) (0,0) het middelpunt is, (3,0) een top en (6,0) een brandpunt
b) (0,0) het middelpunt is, (0,-2) een brandpunt en e = 2 is
c) (0,0) het middelpunt is, (3,0) een top en 3 y + 4 x = 0 een asymptoot is
d) (-2,3) het middelpunt is, (-11,3) een top en e = 1,333….
e) (-7,1) en (8,1) de toppen zijn en 2 x - 3 y + 2 = 0 een asymptoot is

4 Rechte en kegelsnede

Oefeningen

1 Bepaal de onderlinge ligging van de kegelsnede K met de rechte l :

$a) K \leftrightarrow 3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y + 2 = 0 \qquad l \leftrightarrow x = 0$

$b) K \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - x + 4y + 4 = 0 \qquad l \leftrightarrow y = 0$

$c) K \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - x + 4y + 4 = 0 \qquad l \leftrightarrow x = 0$

$d) K \leftrightarrow y^2 - x^2 + 4y - x + 7 = 0 \qquad l \leftrightarrow y = 1$

2 Bepaal de onderlinge ligging van de kegelsnede K met de rechte l :

$a)K \leftrightarrow x^2+4xy+4y^2+6x+10y=0$	$l \leftrightarrow y=1$
$b)K \leftrightarrow x^2+2xy+y^2-2x+2y+1=0$	$l \leftrightarrow x+y-1=0$
$c)K \leftrightarrow x^2-y^2+2y-1=0$	$l \leftrightarrow x+y-1=0$
$d)K \leftrightarrow x^2+3xy+y^2-y=0$	$l \leftrightarrow 3x+y-1=0$
$e)K \leftrightarrow x^2+2xy+y^2-2x+2y+1=0$	$l \leftrightarrow 2y-1=0$

3 Bespreek de onderlinge stand van de kegelsnede K en de rechte l in functie van a

$a)K \leftrightarrow x^2-xy+y^2-1=0$	$l \leftrightarrow ax+y-2=0$
$b)K \leftrightarrow x^2-xy+y^2-1=0$	$l \leftrightarrow x+ay-2=0$
$c)K \leftrightarrow x^2-xy+y^2-1=0$	$l \leftrightarrow x+y-a=0$
$d)K \leftrightarrow x^2-2xy-y^2+1=0$	$l \leftrightarrow ax+2y-1=0$

4 Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt V van de kegelsnede K

$a)K \leftrightarrow x^2+y^2-25=0$	$V(3,4)$
$b)K \leftrightarrow 3xy-x-y+1=0$	$V(1,0)$
$c)K \leftrightarrow x^2-2xy+y^2+2x-3y+1=0$	$V(1,1)$
$d)K \leftrightarrow 2x^2+3y^2+3x+5y=0$	$V(0,0)$
$e)K \leftrightarrow x^2+y^2-6x+2y+5=0$	$V(5,0)$
$f)K \leftrightarrow x^2+2xy+3x-y-4=0$	$V(1,0)$

5 Bepaal de vergelijkingen van de (eventuele) raaklijnen uit het punt V aan de kegelsnede K

$a)K \leftrightarrow 3xy+x-y+1=0$	$V(0,1)$
$b)K \leftrightarrow 2x^2+xy+x+1=0$	$V(2,1)$
$c)K \leftrightarrow x^2-2xy+x-2y+1=0$	$V(1,0)$
$d)K \leftrightarrow x^2-xy+y^2-3=0$	$V(0,2)$
$e)K \leftrightarrow xy-2y^2+4x-4=0$	$V(0,0)$
$f)K \leftrightarrow 2x^2-xy-4y+4=0$	$V(0,0)$

5 Classificatie van de kegelsneden

$\delta > 0$ en $a\Delta > 0 \Leftrightarrow$	K is een niet-ontaarde lege ellips
$\delta > 0$ en $a\Delta < 0 \Leftrightarrow$	K is een niet-ontaarde niet-lege ellips
$\delta > 0$ en $\Delta = 0 \Leftrightarrow$	K is een ontaarde ellips (punt)
$\delta < 0$ en $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow$	K is een niet-ontaarde hyperbool
$\delta < 0$ en $\Delta = 0 \Leftrightarrow$	K is een ontaarde hyperbool (2 snijdende rechten)
$\delta = 0$ en $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow$	K is een niet-ontaarde parabool
$\delta = 0$ en $\Delta = 0 \Leftrightarrow$	K is een ontaarde parabool : 2 evenwijdige rechten, die kunnen samenvallen of een lege parabool.

Voorbeelden
$x^2 + y^2 + 1 = 0$
$x^2 + y^2 - 1 = 0$
$x^2 + y^2 = 0$

$x^2 - y^2 + 1 = 0$ $\qquad xy = 1$
$x^2 - y^2 = 0$ $\qquad xy = 0$

$x^2 - y = 0$
$x^2 - 1 = 0$ $\qquad x^2 = 0$ $\qquad x^2 + 1 = 0$

Voorbeelden
Bepaal de aard van de volgende kegelsneden
$a) K \leftrightarrow x^2 - 4y^2 - 4 = 0$
$b) K \leftrightarrow y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
$c) K \leftrightarrow x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$
$d) K \leftrightarrow y^2 - 3xy + 2 = 0$
$e) K \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$

Oefeningen
1 Bepaal de aard van de volgende kegelsneden
$a) K \leftrightarrow xy - 4 = 0$
$b) K \leftrightarrow x^2 - 7y = 0$
$c) K \leftrightarrow x^2 - 8x - 4y = 0$
$d) K \leftrightarrow 4x^2 + y^2 - 8x = 0$
$e) K \leftrightarrow 2x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 1 = 0$
$f) K \leftrightarrow 9x^2 + 6xy + y^2 - 6x - 2y - 1 = 0$
$g) K \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 7 = 0$
$h) K \leftrightarrow 25x^2 - 10xy + y^2 + 35x - 7y + 12 = 0$
$i) K \leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4x + 4\sqrt{3}y - 4 = 0$
$j) K \leftrightarrow x^2 + 2xy - 4y^2 + 5x - 10y + 5 = 0$

6 Bepalen van de componenten van een ontaarde kegelsnede

Een ontaarde kegelsnede (Δ=0) kan bestaan uit twee rechten, die eventueel evenwijdig kunnen zijn) of uit een punt.

$K = l_1 \cup l_2$ $\qquad$ of $\qquad K = \{D\} = (l_1 \cap l_2)$

Om de vergelijkingen te vinden van deze componenten l_1 en l_2 te vinden gaan we de vergelijking van de ontaarde kegelsnede schrijven als een som of verschil van kwadraten van eerstegraadsveeltermen.
Bij een verschil krijgen we een unie van twee rechten; bij een som hebben we een doorsnede van twee rechten, dus een punt.

Indien $a = a' = a'' = 0$, dan is één van de coëfficiënten b, b' of b'' ook nul en dan ligt de ontbinding voor de hand.

Voorbeelden

$a) K \leftrightarrow x^2 + xy - 6y^2 - 2x - y + 1 = 0$

$b) K \leftrightarrow 2x^2 + 3xy - 2y^2 - x + 8y - 6 = 0$

$c) K \leftrightarrow x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$

$d) K \leftrightarrow 3xy - 5y = 0$

Oefeningen

1 De volgende kegelsneden zijn ontaard. Controleer.
Zoek de vergelijkingen van de componenten

$a) K \leftrightarrow 2x^2 - 3xy - x = 0$

$b) K \leftrightarrow 2x^2 - xy + y - 2 = 0$

$c) K \leftrightarrow x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0$

$d) K \leftrightarrow x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0$

$e) K \leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 1 = 0$

$f) K \leftrightarrow x^2 + xy - 2y^2 - 3x - 6y = 0$

$g) K \leftrightarrow 2x^2 + xy - y^2 + 5x - y + 2 = 0$

$h) K \leftrightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

$i) K \leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 6 = 0$

$j) K \leftrightarrow 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 9x - 13y + 4 = 0$

$k) K \leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

7 Kegelsnedenbundels

De algemene vergelijking van de kegelsnede is

$$K \leftrightarrow f(x, y) = 0 \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0 \quad met \quad (a, b'', a') \neq (0,0,0)$$

Vermits deze vergelijking slechts op een veelvoud na bepaald is, kan één van de coëfficiënten steeds gelijk gesteld worden aan 1. Om de kegelsnede vast te leggen, moeten dus nog 5 coëfficiënten bepaald worden.
De kegelsnede is dus volledig bepaald door (onder andere) 5 punten.
Door 4 punten kunnen dus nog oneindig veel kegelsneden gaan, deze vormen samen een bundel van kegelsneden.

Bepaal de verzameling van alle kegelsneden die door de 4 punten $A(1,2)$, $B(1,0)$, $C(-1,0)$ en $D(2,-1)$ gaan.

Oplossing

$K \leftrightarrow ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0$

We eisen dat $\{A, B, C, D\} \subset K$ en vinden

$$\begin{array}{lllllll}
a & +4b'' & +4a' & +2b' & +4b & +a''=0 & (1)\\
a & & & +2b' & & +a''=0 & (2)\\
a & & & -2b' & & +a''=0 & (3)\\
4a & -4b'' & +a' & +4b' & -2b & +a''=0 & (4)
\end{array}$$

Uit (2) en (3) volgt dat $b' = 0$ en dat $a + a'' = 0$ (5)

$$\begin{array}{llllll}
\text{(4) wordt} & 3a & -4b'' & +a' & -2b & =0 \quad (\times\ 1)\\
\text{(1) wordt} & & +b'' & +a' & +b & =0 \quad (\times\ -1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
3a & & -5b'' & -3b & =0\\
& a' & +b'' & +b & =0
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\text{Dus} & 3a & = & 5b'' + 3b\\
& a' & = & -b'' - b\\
\text{en uit (5)} & 3a'' & = & -5b'' - 3b\\
& b' & = & 0
\end{array}$$

Dit vullen we in in de algemene vergelijking (x 3)

$3ax^2 + 6b''xy + 3a'y^2 + 6b'x + 6by + 3a'' = 0$

en vinden

$$(5b''+3b)x^2 + 6b''xy + (-3b''-3b)y^2 + 6by - 5b'' - 3b = 0$$

$$(3x^2 - 3y^2 + 6y - 3)b + (5x^2 + 6xy - 3y^2 - 5)b'' = 0$$

en met $3b = p$ en $b'' = q$ wordt dit

$$p(x^2 - y^2 + 2y - 1) + q(5x^2 + 6xy - 3y^2 - 5) = 0$$

De verzameling van alle kegelsneden die door de 4 gegeven punten gaan, kunnen we dus schrijven als een lineaire combinatie van twee kegelsneden K_1 en K_2 met

$K_1 \leftrightarrow x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$

$K_2 \leftrightarrow 5x^2 + 6xy - 3y^2 - 5 = 0$

$V = \{K \leftrightarrow p.f_1 + q.f_2 = 0; p, q \in \Re\}$ is de gevraagde verzameling van kegelsneden die door de opgegeven 4 punten gaan. We noemen deze verzameling een bundel van kegelsneden, bepaald door de twee kegelsneden $K_1 \leftrightarrow f_1 = 0$ en $K_2 \leftrightarrow f_2 = 0$. Deze twee kegelsneden noemt men de basisexemplaren van de bundel, de andere kegelsneden noemt men (gewone) exemplaren.

Eigenschappen

Elk paar verschillende exemplaren van een bundel is een paar basisexemplaren.

Elk punt dat tot twee basisexemplaren van een bundel behoort, is een element van elk exemplaar van de bundel. We noemen dit een vast punt van de bundel.

Er is juist één exemplaar van de bundel dat door een (willekeurig) niet-vast punt van de bundel gaat.

Een kegelsnedenbundel, die minstens één niet-ontaarde kegelsnede bevat, bevat minstens één en hoogstens drie ontaarde exemplaren.

Bewijs

Stel $K_1 \leftrightarrow a_1x^2 + 2b_1''xy + a_1'y^2 + 2b_1'x + 2b_1y + a_1'' = 0$

en $K_2 \leftrightarrow a_2x^2 + 2b_2''xy + a_2'y^2 + 2b_2'x + 2b_2y + a_2'' = 0$

Vermits minstens één exemplaar niet-ontaard is, nemen we bijvoorbeeld $\Delta_1 \neq 0$.
Voor alle andere kegelsneden van de bundel kunnen we schrijven:
$K \leftrightarrow k.f_1 + f_2$ met matrix $M = k.M_1 + M_2$ en determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka_1 + a_2 & kb_1''+b_2'' & kb_1'+b_2' \\ kb_1''+b_2'' & ka_1'+a_2' & kb_1 + b_2 \\ kb_1'+b_2' & kb_1 + b_2 & ka_1''+a_2'' \end{vmatrix} .$$

K is ontaard als en slechts als $\Delta = 0$.
Door toepassing van eigenschappen van determinanten vinden we dan de volgende derdegraadsvergelijking :

$$k^3 . \begin{vmatrix} a_1 & b_1'' & b_1' \\ b_1'' & a_1' & b_1 \\ b_1' & b_1 & a_1'' \end{vmatrix} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \begin{vmatrix} a_2 & b_2'' & b_2' \\ b_2'' & a_2' & b_2 \\ b_2' & b_2 & a_2'' \end{vmatrix} = 0 \text{ met } \Delta_1 \neq 0 .$$

Deze vergelijking heeft minstens één en hoogstens drie reële oplossingen. Met deze k-waarden corresponderen dan één, twee of drie exemplaren van de bundel, verschillend van K_1.

Door één van deze ontaarde exemplaren (2 rechten) te bepalen, kan men de snijpunten bepalen van deze rechten met een basisexemplaar van de bundel. Zo kan men dus de (hoogstens 4) vaste punten van de kegelsnedenbundel bepalen.

Toepassing : het bepalen van de snijpunten van twee kegelsneden.
We bepalen een lineaire combinatie die een ontaarde kegelsnede oplevert. We ontbinden dit ontaarde exemplaar in zijn componenten en bepalen dat de snijpunten van de rechte(n) met een van de twee gegeven kegelsneden. Dit zijn dan ook de snijpunten van de twee gegeven kegelsneden.

Oefening

1 Bepaal de vaste punten van de kegelsnedenbundels met vergelijking

$a) p.(x^2 + y^2 - 25) + q.(x^2 - y^2 - 7) = 0$

$b) p.(x^2 - xy + y^2 - 3) + q.(x^2 - 4xy + y^2 + 3) = 0$

$c) p.(x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2) + q.(x^2 - 4xy + y^2 + 2) = 0$

$d) p.(xy + 3x - 2y + 4) + q.(x^2 - 2xy + y^2 - 4) = 0$

$e) p.(3x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 4) + q.(xy - y^2 - 5x + 3y - 2) = 0$

2 Bepaal de snijpunten van de kegelsneden met volgende vergelijkingen.

$a) 3x^2 - y^2 - 27 = 0$	$x^2 - y^2 + 45 = 0$
$b) 5x^2 + 3y^2 - 92 = 0$	$2x^2 + 5y^2 - 52 = 0$
$c) x^2 + 4xy = 0$	$x^2 - xy + y^2 - 21 = 0$
$d) 3x^2 + 8y^2 - 140 = 0$	$5x^2 + 8xy - 84 = 0$
$e) x^2 - 3xy + 2y^2 - 15 = 0$	$2x^2 + y^2 - 6 = 0$
$f) x^2 + y^2 + 3x + 3y - 8 = 0$	$xy + 4x + 4y - 2 = 0$
$g) x^2 + y^2 - 25 = 0$	$xy - 12 = 0$
$h) x^2 - xy - 12y^2 - 8 = 0$	$x^2 + xy - 10y^2 - 20 = 0$
$i) x^2 + y^2 - 2x - 2y - 12 = 0$	$xy - 6 = 0$
$j) 6x^2 + 3xy + 2y^2 - 24 = 0$	$3x^2 + 2xy + 2y^2 - 18 = 0$

Meetkundige plaatsen

Analytische methode

1 Gegeven twee punten P en Q van het vlak. Zoek de meetkundige plaats van de punten van het vlak, waarvan het verschil van het kwadraat van de afstand tot een punt P met het kwadraat van de afstand tot een punt Q ($Q \neq P$) gelijk is aan a.

2 x en y zijn twee rechten van het vlak zodat $x \perp y$ en $x \cap y = \{O\}$.
A en $B \in x$ en $A \neq B$. a is een rechte door punt A, b is een rechte door punt B.
$a \cap y = \{C\}$ en $b \cap y = \{D\}$ zodat O het midden is van $[CD]$.
Zoek de meetkundige plaats van S als $\{S\} = a \cap b$.

3 Gegeven 2 vaste punten A en B. Bepaal de meetkundige plaats van het veranderlijke punt P zodat $|PA| = 2.|PB|$.

4 Gegeven twee punten P en Q van het vlak. Zoek de meetkundige plaats van de punten van het vlak, waarvan het som van de kwadraten van de afstanden tot het punt P respectievelijk tot het punt Q ($Q \neq P$) gelijk is aan a.

5 Gegeven twee punten P en Q van het vlak. Zoek de meetkundige plaats van de punten van het vlak, waarvan verhouding van de afstanden tot het punt P respectievelijk tot het punt Q ($Q \neq P$) gelijk is aan a.

6 Gegeven twee punten $P(a,0)$ en $Q(-a,0)$ van het vlak. Zoek de meetkundige plaats van de punten van het vlak, waarvan het product van de afstanden tot het punt P respectievelijk tot het punt Q ($Q \neq P$) gelijk is aan a^2.

7 Gegeven twee snijdende rechten. Bepaal de meetkundige plaats van de punten waarvan de som van de kwadraten van de afstanden tot deze twee rechten constant is.

Methode van de geassocieerde krommen

Voor deze oefeningen zijn applets uitgewerkt : zie
users.skynet.be/cabri-applets – Meetkundige plaatsen 1 en 2

1 x en y zijn twee rechten van het vlak zodat $x \perp y$ en $x \cap y = \{O\}$.
A en $B \in x$ en $A \neq B$. a is een rechte door punt A, b is een rechte door punt B.
$a \cap y = \{C\}$ en $b \cap y = \{D\}$ zodat O het midden is van $[CD]$.
Zoek de meetkundige plaats van S als $\{S\} = a \cap b$.

2 Driehoek OAB is rechthoekig in O en een veranderlijke rechte a, evenwijdig met OA, snijdt de zijden OB en AB in resp. C en D. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt S van AC en OD.

3 Bepaal de meetkundige plaats van de middens van de koorden van een cirkel waarvan de dragers door een gegeven punt, buiten de cirkel, gaan.

4 Gegeven een driehoek ABC. De rechte $l \,//\, AB$ snijdt BC in D en AC in E.
Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt S van AD en BE als l zich evenwijdig verplaatst.

5 Gegeven een rechte OD. Men beschouwt de cirkels die in D raken aan OD en de rechten die O en het middelpunt M van iedere cirkel bevatten. Bepaal de meetkundige plaats van de snijpunten van iedere rechte met de overeenkomstige cirkel.

6 Op (het verlengde van) de zijde BC van de driehoek ABC neemt men de punten Q en R zodat C het midden is van $[QR]$. Men verbindt Q met A en R met het midden S van $[AC]$. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt P van RS en QA.

7 Beschouw het punt $A(0,a)$ en het punt $P(p,0)$ in een orthonormale basis. Construeer de loodlijn in P op AP. Deze loodlijn snijdt de y-as in B. Construeer het lijnstuk $[BC]$ zodanig dat P het midden is van $[BC]$. Bepaal de meetkundige plaats van de punten C als P de x-as doorloopt.

8 Een driehoek PQR heeft een vaste basis $[PQ]$. Bepaal de meetkundige plaats van het hoekpunt R als de hoek $\angle[RP\ [RQ$ constant is.

9 Een driehoek PQR heeft een vaste basis $[PQ]$. Bepaal de meetkundige plaats van het hoekpunt R als het verschil van de basishoeken $\angle[PQ\ [PR$ en $\angle[QP\ [QR$ constant is.

10 Een lijnstuk $[AB]$ heeft een constante lengte l en beweegt zo dat de eindpunten tot twee gegeven orthogonale rechten behoren. Bepaal de meetkundige plaats van een punt $P \in AB$ als $(A,B,P) = -k$.

11 Gegeven twee snijdende rechten p en q en een punt $L \notin p$, $L \notin q$. Een vaste rechte l die L bevat snijdt p en q resp. in P en Q. Een veranderlijke rechte m die L bevat snijdt p en q resp. in R en S. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt M van PS en RQ als m rond L wentelt.

12 Gegeven een driehoek PQR. Een transversaal d snijdt PQ, QR, RP resp. in S,T,U. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt N van PT en SR als d zich evenwijdig verplaatst.

13 Een driehoek PQR heeft twee vaste hoekpunten P en Q, terwijl het hoekpunt R zich verplaatst op een vaste rechte evenwijdig met PQ. Bepaal de meetkundige plaats van het hoogtepunt H van deze driehoek.

14 Gegeven een driehoek PQR. Door een willekeurig punt $D \in QR$ trekt men $DE \mathbin{//} PR$ en $DF \mathbin{//} PQ$. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt S van de diagonalen van het parallellogram $PEDF$.

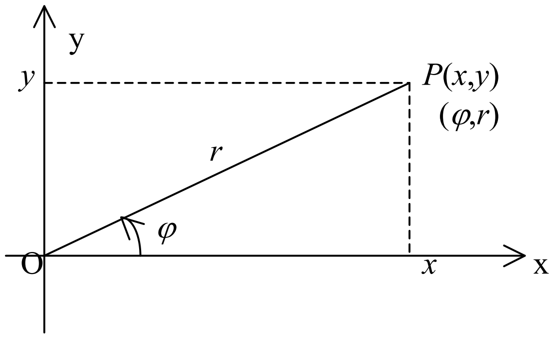
15 Gegeven twee snijdende rechten p en q en een punt $M \notin p$, $M \notin q$. Een rechte d die M bevat snijdt p en q resp. in P en Q. De rechten die resp. P en Q bevattten en evenwijdig zijn met resp. q en p, hebben S als snijpunt. Bepaal de meetkundige plaats van S als d rond M wentelt.

16 Gegeven twee rechten p en q met $p \perp q$. Een orhtogonaal rechtenpaar $\{c,d\}$ met snijpunt $P \in p$ wentelt om P. c snijdt q in Q. Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt S van d met de rechte QR, waarbij $R \in p$.

17 Op twee orthogonale rechten p en q met $p \cap q = \{O\}$ neemt men resp. de punten P en Q zodat $\text{abs}(P) + \text{abs}(Q) = k$. Bepaal de meetkundige plaats van het tweede snijpunt S van de cirkel omgeschreven aan de driehoek OPQ met de rechte l die O bevat en evenwijdig is aan PQ.

18 Twee cirkels C_1 en C_2 raken elkaar uitwendig in O. $[OP]$ is een koorde van C_1 en $[OQ]$ is een koorde van C_2 waarbij $OP \perp OQ$. Bepaal de meetkundige plaats van het midden M van $[PQ]$ als het rechtenpaar $\{OP,OQ\}$ rond O wentelt.

Poolcoördinaten



O is de pool
x is de poolas
φ is de poolhoek of het argument
r is de voerstraal

De poolhoek is bepaald op een veelvoud van 2π na.
Voor de pool is $r = 0$ en φ is onbepaald.
De voerstraal mag negatief zijn : $(\varphi , r) = (\varphi + \pi , -r)$

Van poolcoördinaat naar cartesische coördinaat

$$x = r.\cos\varphi$$
$$y = r.\sin\varphi$$

Van cartesische coördinaat naar poolcoördinaat

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = Bg\tan\frac{y}{x} \quad als \quad x > 0\,; \quad \varphi = \pi + Bg\tan\frac{y}{x} \quad als \quad x < 0$$

Vergelijkingen in poolcoördinaten van krommen

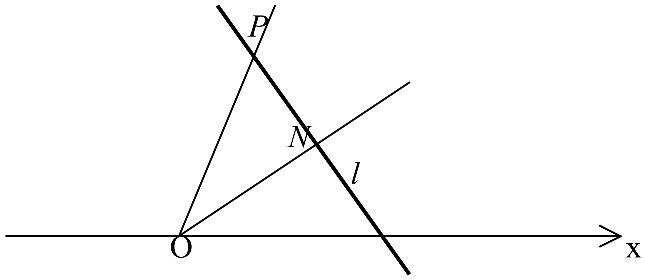
<u>Rechte </u>door de pool
$\varphi = \varphi_0$

Rechte, niet door de pool

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ar\cos\varphi + br\sin\varphi + c = 0 \Rightarrow r = \frac{-c}{a\cos\varphi + b\sin\varphi}$$

Deze vergelijking is onhandig.

Een eenvoudiger vergelijking krijgt men als de rechte bepaald wordt door een normaalvector.
De rechte l wordt bepaald door het punt $N(\varphi_1,r_1) \in l$ en $ON \perp l$



Voor elk punt $P(\varphi,r) \in l$ geldt : $r_1 = r.\cos(\varphi - \varphi_1) \Rightarrow r = \dfrac{r_1}{\cos(\varphi - \varphi_1)}$

Voor L ⊥ X geldt $r = \dfrac{r_1}{\cos\varphi}$ of $x = r_1$

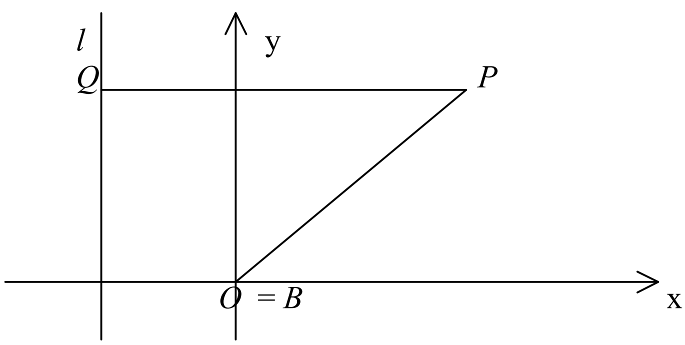
Voor L // X geldt $r = \dfrac{r_1}{\cos(\varphi - \frac{\pi}{2})} = \dfrac{r_1}{\sin\varphi}$ of $y = r_1$

De spiraal S : $r = 2.\varphi$

Opmerking.
Niet alle coördinaten van een punt van S voldoen aan de poolvergelijking.
Het punt $P(\pi,2\pi)$ behoort tot de spiraal, maar de andere poolcoördinaten van hetzelfde punt voldoen niet aan de vergelijking, bijvoorbeeld $P(3\pi,2\pi)$.

Een cirkel met het middelpunt in de pool : $r = r_1$

Poolvergelijkingen van niet-ontaarde kegelsneden (geen cirkels)
We vinden de eenvoudigste vergelijking als we een brandpunt als pool nemen en de richtlijn loodrecht op de poolas nemen.



$K = \{P\,;\, \dfrac{d(P,B)}{d(P,l)} = e\}$ is de kegelsnede met richtlijn l, brandpunt B en excentriciteit e.

Stel $l \leftrightarrow x = -k$, dan vinden we

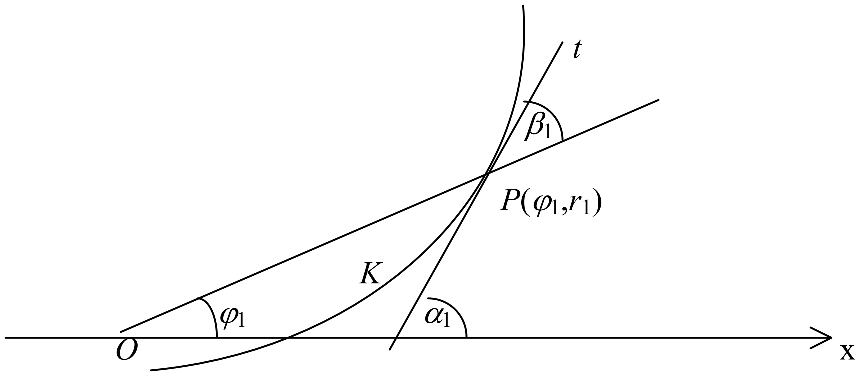
$$\begin{aligned} P(\varphi, r) \in K &\Leftrightarrow d(P,B) = e.d(P,l) \\ &\Leftrightarrow r = e.\left|x_P - x_Q\right| \\ &\Leftrightarrow r = e.\left|r.\cos\varphi + k\right| \\ &\Leftrightarrow r = \pm e.(r\cos\varphi + k) \\ &\Leftrightarrow r = \frac{e.k}{1 - e.\cos\varphi} \quad of \quad r = \frac{-e.k}{1 + e.\cos\varphi} \end{aligned}$$

Met $(\varphi,r) = (\varphi + \pi,-r)$ gaat de tweede vergelijking over in de eerste vergelijking, want

$$r = \frac{-e.k}{1 + e.\cos\varphi} \Leftrightarrow -r = \frac{-e.k}{1 + e.\cos(\varphi + \pi)} \Leftrightarrow -r = \frac{-e.k}{1 - e.\cos\varphi} \Leftrightarrow r = \frac{e.k}{1 - e.\cos\varphi}$$

Dus : $P(\varphi, r) \in K \Leftrightarrow r = \dfrac{e.k}{1 - e.\cos\varphi}$

Raaklijn in een punt van een kromme *K* met gegeven poolvergelijking



Stel : $K \leftrightarrow r = f(\varphi)$.

Het stelsel $\begin{cases} x = r.\cos\varphi = f(\varphi).\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi = f(\varphi).\sin\varphi \end{cases}$ is dan een stelsel parametervergelijkingen van *K*.

Uit de analyse weten we dat $\tan\alpha = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \dfrac{r'.\sin\varphi + r.\cos\varphi}{r'.\cos\varphi - r\sin\varphi}$ en

$$\tan\beta_1 = \tan(\alpha_1 - \varphi_1) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\varphi_1}{1 + \tan\alpha_1.\tan\varphi_1} = \frac{\dfrac{r_1'.\sin\varphi_1 + r_1.\cos\varphi_1}{r_1'.\cos\varphi_1 - r_1.\sin\varphi_1} - \dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}}{1 + \dfrac{r_1'.\sin\varphi_1 + r_1.\cos\varphi_1}{r_1'.\cos\varphi_1 - r_1.\sin\varphi_1}.\dfrac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1}}$$

waaruit volgt dat voor een willekeurig punt $P(\varphi,r)$ geldt dat $\tan\beta = \dfrac{r}{r'}$ met β is de hoek tussen de raaklijn aan de kromme in het punt *P* en de voerstraal van *P*.

Oefeningen

1 (x, y) is de coördinaat van een punt in een orthogonale basis.
Bepaal de poolcoördinaat (φ, r) als O als pool en OE_1 als poolas gekozen wordt.

a) $(x, y) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
b) $(x, y) = (-3, 0)$
c) $(x, y) = (0, 2)$
d) $(x, y) = (-2, 2\sqrt{3})$
e) $(x, y) = (1, \sqrt{3})$
f) $(x, y) = (-1, 1)$
g) $(x, y) = (13, 5)$
h) $(x, y) = (-11, 1)$

2 Bepaal de cartesische coördinaat (x, y) in een orthonormale basis als (φ, r) gegeven is met O als pool en OE_1 als poolas.

a) $(\varphi, r) = (\frac{\pi}{6}, 2)$
b) $(\varphi, r) = (\frac{\pi}{3}, 1)$
c) $(\varphi, r) = (\frac{\pi}{4}, 1)$
d) $(\varphi, r) = (\frac{3\pi}{2}, 2)$
e) $(\varphi, r) = (\frac{\pi}{2}, 2)$
f) $(\varphi, r) = (\frac{7\pi}{4}, \sqrt{3})$
g) $(\varphi, r) = (\pi + Bg\tan\frac{5}{13}, \sqrt{194})$
h) $(\varphi, r) = (Bg\tan\frac{-5}{11}, 1)$

3 Schrijf de volgende vergelijkingen in poolcoördinaten

a) $x^2 + y^2 = 9$
b) $x^2 - y^2 = 4$
c) $x^2 - y^2 = -9$
d) $xy = 8$

4 Schrijf de volgende vergelijkingen in cartesische coördinaten

a) $r^2 \cos 2\varphi + 9 = 0$
b) $\varphi = \frac{\pi}{2}$
c) $r = 8$
d) $r^2 \sin 2\varphi = 25$
e) $r = 3 - 2\cos\varphi$
f) $r\cos(\varphi - \frac{\pi}{3}) = 3$
g) $r(2 - 3\cos\varphi) = 15$
h) $r\cos\varphi - \sin^2\varphi = 0$

5 Schrijf de vergelijking in poolcoördinaten van

a) de rechte door het punt $P\,(\frac{\pi}{6}, 4)$ en loodrecht op de voerstraal door P .
b) de ellips met brandpunt in de pool , met richtlijn $l = \frac{3}{\cos\varphi}$ en excentriciteit $e = \frac{3}{5}$
c) de parabool met brandpunt in de pool en top in $(\frac{3\pi}{2}, 2)$
d) de hyperbool met brandpunt in de pool , met richtlijn $l = \frac{-5}{\cos\varphi}$ en $e = \frac{5}{4}$

6 Bepaal de hoek gevormd door de voerstraal en de raaklijn aan K in de aangegeven punten .

a) $K \leftrightarrow r = 2R\cos\varphi$ $P(\frac{\pi}{4}, R\sqrt{2})$ $Q(-\frac{\pi}{6}, R\sqrt{3})$

b) $K \leftrightarrow 2+\cos\varphi$ $P(0,3)$ $Q(\pi,1)$

c) $K \leftrightarrow r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ $P(\frac{\pi}{8}, a\sqrt[4]{2})$ $Q(\frac{\pi}{6}, a)$

d) $K \leftrightarrow r = \sin\varphi + \cos\varphi$ $P(0,1)$ $Q(\frac{\pi}{2},1)$

e) $K \leftrightarrow r = e^{-\varphi}$ $P(0,1)$ $Q(3, e^{-3})$

f) $K \leftrightarrow 1-\cos\varphi$ $P(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ $Q(\frac{\pi}{2},1)$ $M(0,0)$ $N(\pi,2)$

Meetkundige plaatsen in poolcoördinaten

Voor deze oefeningen zijn applets uitgewerkt : zie
users.skynet.be/cabri-applets – Meetkundige plaatsen 3

1 Gegeven een cirkel C met straal a en een raaklijn t in een punt T van C. Een halve rechte met oorsprong O, tegenpunt van T op C, die niet evenwijdig is met t, snijdt C een tweede maal in M en snijdt t in N. Op die halve rechte $[OM$ nemen we een punt P zodat $|OP| = |MN|$. Bepaal de meetkundige plaats van het punt P als de halve rechte rond O wentelt.

2 Gegeven een rechte d en een punt $O \notin d$. De rechte x die O bevat en met d orthogonaal is, snijdt d in D. Een halve rechte met oorsprong O, die met d niet evenwijdig is, snijdt d in M. Op $[OM$ nemen we langs beide kanten van M de punten P en Q zodat $|MP| = |MQ| = |DM|$. Bepaal de meetkundige plaats van de punten P en Q als de halve rechte $[OM$ rond O wentelt.

3 Gegeven de cirkel $C(M,a)$. De halve rechte met oorsprong $O \in C$ snijdt C een tweede maal in S. Op $[OS$ nemen we langs weerskanten van S de punten P en Q waarbij $|SP| = |SQ| = b$. Bepaal de meetkundige plaats van de punten P en Q als de halve rechte $[OS$ rond O wentelt

4 Gegeven twee punten $P(0,a)$ en $Q(\pi,a)$ van het vlak. Zoek de meetkundige plaats van de punten van het vlak, waarvan het product van de afstanden tot het punt P respectievelijk tot het punt Q ($Q \neq P$) gelijk is aan a^2.

5 Gegeven een rechte OD. Men beschouwt de cirkels die in D raken aan OD en de rechten die O en het middelpunt M van iedere cirkel bevatten. Bepaal de meetkundige plaats van de snijpunten van iedere rechte met de overeenkomstige cirkel.

6 Gegeven een punt O en een rechte d met $O \notin d$. Een rechte l die O bevat snijdt d in D. Op l nemen we de punten P en Q met $|DP| = |DQ| = b$. Bepaal de poolvergelijking van de meetkundige plaats van de punten P en Q als l rond O wentelt. Leid hieruit de cartesische vergelijking af.

7 Gegeven een punt O en een rechte d met $O \notin d$. Een rechte l, die O bevat, snijdt d in D en de rechte $p \perp d$, die O bevat, snijdt d in C. Op l nemen we een punt P zo dat $|OP| = |CD|$. Bepaal de poolvergelijking van de meetkundige plaats van het punt P als l rond O wentelt. Leid hieruit de cartesische vergelijking af.

8 Gegeven twee rechten l en m met $l \perp m$ en $l \cap m = \{O\}$. Een veranderlijke rechte d snijdt l en m resp. in L en M zodat $|LM| = 2a$. Bepaal de poolvergelijking van de meetkundige plaats van orthogonale projectie P van O op d. Leid hieruit de cartesische vergelijking af.

9 Gegeven een vaste rechte $OM = x$ en een rechte l die O bevat. De orthogonale projectie van M op l is Q. Bepaal de poolvergelijking van de meetkundige plaats van de orthogonale projectie P op l van het symmetrisch punt R van Q t.o.v. x als l rond O wentelt. Leid hieruit de cartesische vergelijking af.

10 Bepaal de meetkundige plaats van de middens van de koorden van een kegelsnede, die door een brandpunt van die kegelsnede gaan.