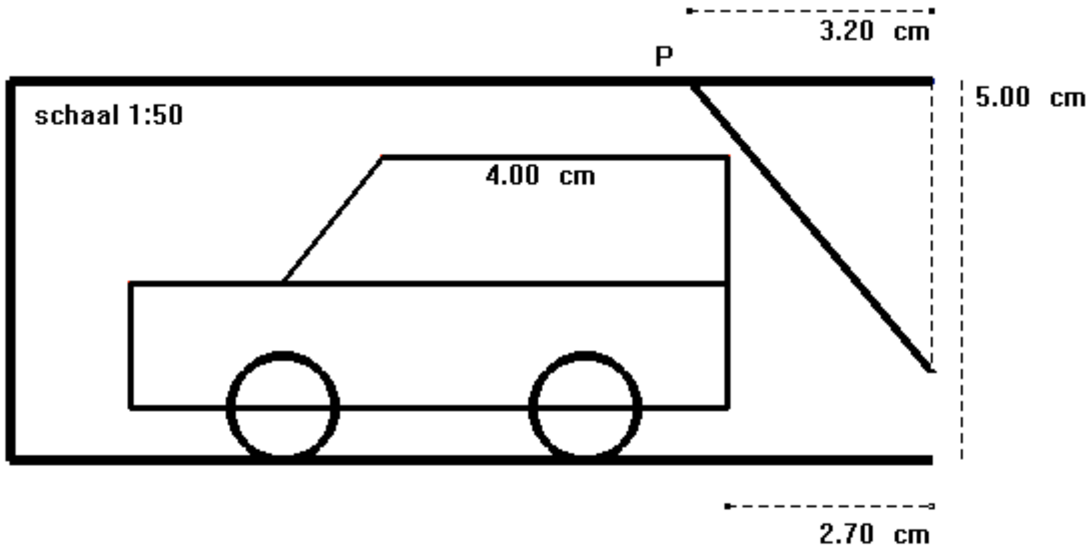
Een asteroïde in de garage

Leon Lenders, Bree

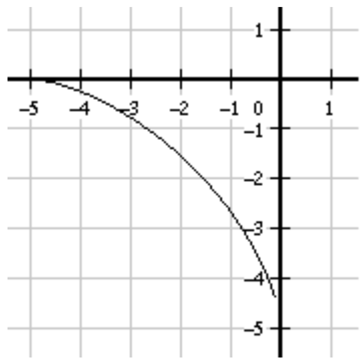
De poort van mijn garage bestaat uit een rechthoekig vlak dat via een horizontale en een verticale geleider kan geopend en gesloten worden. Het bovenste punt (*P*) verplaatst zich in een horizontale geleider aan het plafond en het onderste punt loopt door een verticale geleider. De poort is 2,50 m hoog en ik heb een terreinwagen(tje) met een hoogte van (afgerond) 2,00 m. Omdat de poort bij het openen en sluiten een bepaalde ruimte binnen de garage inneemt, moet ik ervoor zorgen dat ik ver genoeg de garage binnenrijd opdat de poort mijn terreinwagen niet zou raken.



Met behulp van de applet op de website http://lkwadraat.telenet.be (Toepassingen) kan de poort geopend en gesloten worden en kan de wagen worden verplaatst. Ook de hoogte van de garage en de wagen kunnen eventueel aangepast worden.

Een interessante vraag is: hoever moeten we de wagen de garage binnenrijden opdat de poort bij het openen en sluiten de wagen niet zou raken. Om het probleem zo algemeen mogelijk te maken, zullen we de hoogte van de poort (p) en de hoogte van de wagen (h) gebruiken als parameters.

Als we de poort een 'spoor' laten trekken zien we precies de ruimte die de poort bij het openen en sluiten inneemt. Dit gebied wordt begrensd door een (deel van een) kromme.



De bovenkant van de terreinwagen mag deze kromme niet raken. We moeten dus het snijpunt bepalen van deze kromme met de horizontale rechte $y = h - p$.

De volledig geopende poort nemen we als (een deel van) de negatieve x-as [-p , 0] en de gesloten poort laten we samenvallen met (een deel van) de negatieve y-as . Het punt P (bovenste punt van de poort) op de x-as geven we als coördinaat $(a, 0)$. De coördinaat van het snijpunt van de poort met de y-as is dan

$(0, -\sqrt{p^2 - a^2})$. De vergelijking van de gekantelde poort wordt bijgevolg:

$$y = \frac{\sqrt{p^2 - a^2}}{a}(x - a), \qquad (1)$$

beperkt tot het derde kwadrant. Als de poort geopend wordt, doorloopt a de waarden van 0 tot $-p$, bij het sluiten doorloopt a de waarden van $-p$ tot 0. We kiezen nu voor een (voorlopig) vaste waarde k op de x-as tussen $-p$ en 0 en gaan na voor welke waarde a de y-waarde van het snijpunt S van de poort met de verticale rechte $x = k$ minimaal is. De functie die de y-waarde van het snijpunt S weergeeft in functie van a, bekomen we door in (1) x te vervangen door de constante waarde k.

$$y = \frac{\sqrt{p^2 - a^2}}{a}(k - a)$$

Van deze functie bepalen we het minimum door de afgeleide naar a gelijk te stellen aan 0.

$$\frac{a^3 - k.p^2}{a^2.\sqrt{p^2 - a^2}} = 0$$

We vinden dat voor de vaste waarde k het snijpunt S zo laag mogelijk ligt als

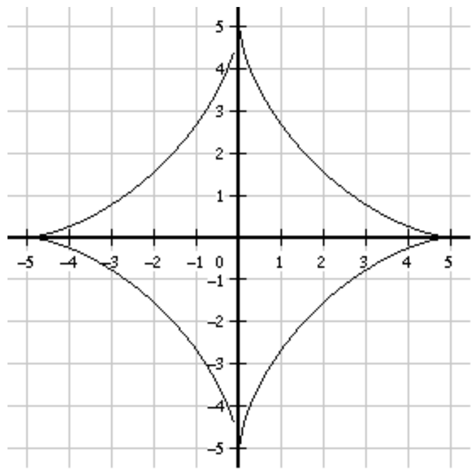
$$a = \sqrt[3]{k.p^2}. \qquad (2)$$

Om nu voor alle waarden van k te bepalen voor welke waarde van a het snijpunt S zo laag mogelijk ligt, moeten we de constante k variabel maken. We vervangen k door x in (2). Door k variabel te maken, verkrijgen we een oneindig aantal laagste punten S.

We omschrijven deze laagste punten door a te vervangen door $\sqrt[3]{x.p^2}$ in (1):

$$y = \frac{\sqrt{p^2 - (p^2.x)^{\frac{2}{3}}}}{(p^2.x)^{\frac{1}{3}}}.[x - (p^2.x)^{\frac{1}{3}}] = \frac{p^{\frac{2}{3}}.\sqrt{p^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}.x^{\frac{1}{3}}.(x^{\frac{2}{3}} - p^{\frac{2}{3}})}{p^{\frac{2}{3}}.x^{\frac{1}{3}}} = -(p^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Deze vergelijking is equivalent met: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}}$, de vergelijking van een astroïde.



De volledige grafiek van de astroïde ziet er uit als op de bijgevoegde tekening. Om ons garageprobleem op te lossen, vervangen we *p* door de hoogte van de poort, stellen we *y* gelijk aan het hoogteverschil tussen de wagen en de poort en lossen we de vergelijking van de astroïde op naar *x*. Voor mijn garage (met *p* = 2.5 m) en wagen (met *h* = 2 m) is

$$x = \left| \left[(2.5)^{\frac{2}{3}} - (0.5)^{\frac{2}{3}} \right]^{\frac{3}{2}} \right| = 1.33 \text{ m.}$$

Op nevenstaande grafiek met schaal 1:50 komt dit overeen met de waarde 2.66. Deze waarde geeft dan de minimale afstand aan tussen de achterkant van de terreinwagen en de gesloten garagepoort zodat we bij het openen van de poort geen blikschade veroorzaken.