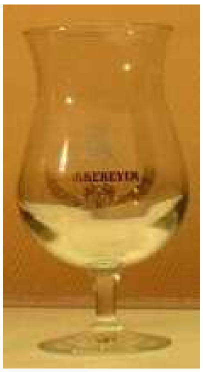
Toepassingen op bepaalde integralen met de TI-89 of TI-92.

Leon Lenders, Bree

Opstellen van een functie door regressie – toepassingen op bepaalde integralen

In deze oefening worden bepaalde integralen opgelost met de TI-89/TI-92 en kunnen de resultaten gecontroleerd worden.

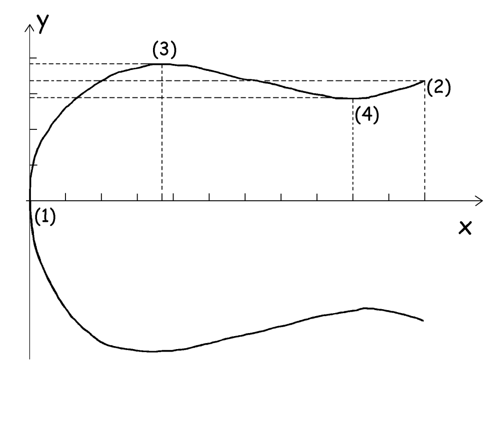


We nemen een bierglas of wijnglas van de vorm zoals hiernaast is afgebeeld. Bij voorkeur een bierglas met een maatstreepje voor een normaal flesje bier van 25 cl.

Met bepaalde integralen zullen we het volume van dit glas bepalen en eventueel de hoogte waar het maatstreepje moet komen voor een volume van 25 cl. We zullen ook de lengte van de gebogen rand en de manteloppervlakte berekenen. Deze resultaten kunnen we dan vergelijken met de werkelijke waarden.

Indien we dit glas plat leggen en een verticale doorsnede maken in de richting van de voet van het glas, verkrijgen we – de voet laten we verder buiten beschouwing – een kromme met een maximum en een minimum.

Door regressie gaan we de vergelijking van deze kromme opstellen. Omdat de kromme een maximum en een minimum bereikt, nemen we aan dat deze kromme kan benaderd worden door de grafiek van de derdegraadsfunctie $y = a.x^3 + b.x^2 + c.x + d$.
Om de vier onbekenden (a, b, c en d) vast te leggen hebben we dus vier punten nodig, die we moeten opmeten. Het punt waar de voet vastzit leggen we in de oorsprong van het assenstelsel (1). We meten de hoogte van het glas en de diameter van de opening (2). Met gepast meetmateriaal kan bepaald worden op welke hoogte het glas zijn maximum en minimum bereikt en ook hier moet de diameter in het glas gemeten worden (3) en (4). Dit laatste is niet zo eenvoudig.
Een eenvoudiger manier om het glas op te meten bestaat erin om het glas plat op een blad papier te leggen en met een dun potlood, loodrecht op het papier, de omtrek van het glas na te trekken. Op ongeveer 2 mm (ongeveer de dikte van de glaswand) aan de binnenkant tekenen we dezelfde vorm na die dan overeenkomt met de binnenkant van het glas.
Op deze tekening brengen we een assenstelsel aan zodat de oorsprong samenvalt met het punt waaraan de voet van het glas vastzit en de x-as de symmetrie-as vormt.
We meten de coördinaten van het maximum, het minimum en het eindpunt van het bovenste gedeelte.



	coördinaten (cm)
voetpunt	(0 ; 0)
maximum	(3,7 ; 3,8)
minimum	(9,0 ; 2,9)
eindpunt	(11,0 ; 3,4)

Deze waarden zijn uiteraard een voorbeeld en hangen af van de vorm van het glas.

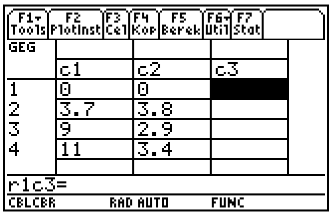
Deze waarden brengen we over naar de TI-89/TI-92 in een GEGEVENS-tabel:
Typ APPS – 6:Geg/Matrixeditor – 3:Nieuw
Type: Gegevens
Map: main
Var: glas
en tweemaal 'Enter'
We geven de coördinaten in als volgt:

GEG	c1	c2
1	0	0
2	3.7	3.8
3	9	2.9
4	11	3.4

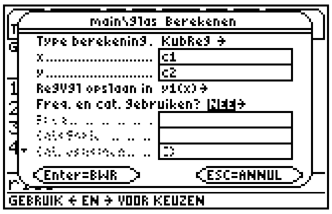
Druk nu F5 (Bereken) :

Type berekening	3:KubReg	(regressie van de derde graad)
x………………	c1	(de eerste coördinaatgetallen bevinden zich in c1)
y………………	c2	(de tweede coördinaatgetallen bevinden zich in c2)
RegVgl opslaan in	y1(x)	(de vergelijking opslaan in y1(x) van de Y-editor)

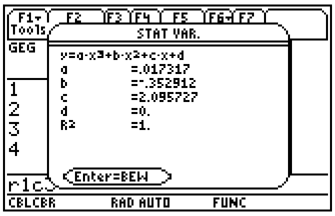
Freq en cat gebruiken?NEE
en tweemaal 'Enter'



gegevens in de tabel



regressiegegevens

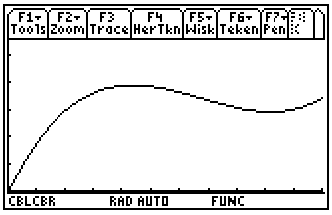


de coëfficiënten

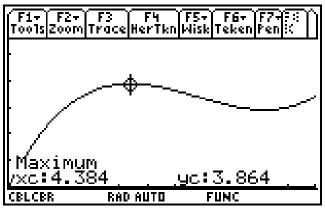
We hebben nu een "kubische regressie" uitgevoerd, d.w.z. dat we een derdegraadsfunctie (kubisch!) hebben bepaald die "zo goed mogelijk" de vier ingegeven punten bevat.
We zien de coëfficiënten van deze functie, die intussen al is opgeslagen in y1(x) van de Y-editor.
De regressiefactor (R^2) is gelijk aan 1. Dit is logisch want door 4 punten gaat meestal juist één derdegraadsfunctie. We hadden in dit geval de functie ook kunnen vinden door een stelsel van 4 vergelijkingen met 4 onbekenden op te lossen.
Indien we maar drie punten hadden ingegeven, zouden we een foutmelding hebben gekregen.
Indien we vijf of meer punten hadden ingegeven, zoekt het toestel de derdegraadsfunctie die zo goed mogelijk al deze punten bevat. Omdat dit meestal niet perfect lukt, zal de regressiefactor niet 1 zijn, maar des te meer van 1 afwijken naarmate de punten verder afwijken van de functie. We kunnen dit even testen door voor een vijfde punt resp. de coördinaat (12 , 6) (R^2=0.970…) en (12 , 9) (R^2=0.905…) in te geven. Deze vergelijking slaan we niet op in een vergelijking van de Y-editor. We wissen deze vijfde rij in de Gegevenstabel met behulp van F6 (Util) – 2:Verwijderen – 2:rij .

In de Y-editor zien we inderdaad dat de functie y1(x) is ingevuld met de gevonden coëfficiënten. We stellen de WINDOW-gegevens in als volgt:
xmin: 0
xmax: 11
xscl: 1
ymin: 0
ymax: 5.5
yscl: 1
xres: 1

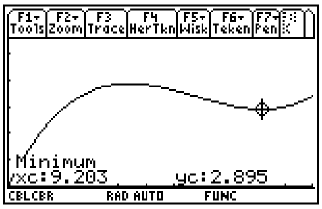
We drukken op GRAPH en zien de grafiek in de vorm van ons (half-)glas verschijnen.



de grafiek



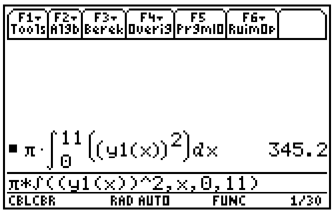
het maximum



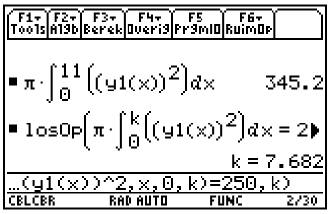
het minimum

Deze kromme heeft niet perfect de vorm van het glas.
Het glas heeft onderaan (in de buurt van de oorsprong) een veel rondere vorm. De raaklijn in de oorsprong zou verticaal moeten zijn, wat bij een derdegraadsfunctie niet kan.
Het tweede en derde punt komen ook niet perfect met het maximum en minimum overeen. We bepalen deze twee extrema met F5 (Wisk) – resp. 4:Maximum en 3:Minimum (onder- en bovengrens ingeven!) en zien dat het maximum bereikt wordt voor x = 4.4 en het minimum voor x=9.2. Deze afwijkingen compenseren elkaar een beetje (vanonder is het “echte” glas iets breder en op halve hoogte iets smaller) maar zullen de waarden die we met bepaalde integralen zullen berekenen, alleszins een beetje beïnvloeden.

We berekenen eerst het volume van het glas.
Hiervoor drukken we op F3 (Berek) – 2:integreer .
Voor het volledige volume nemen we als onder- en bovengrens resp. 0 en 11.
We berekenen ook op welke hoogte op het glas het maatstreepje voor een volume van 25 cl of 250 cm³ moet aangebracht worden. We stellen de bovengrens gelijk aan de onbekende k en lossen de vergelijking “het volume = 250” op naar de onbekende k (F2 (Algb)- 1:losOp).



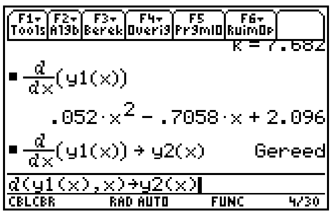
totale volume (cm³)



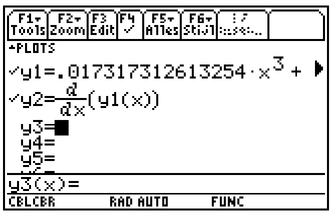
maatstreepje voor 25 cl (cm)

Deze twee resultaten kunnen we controleren door het volledig gevuld glas over te gieten in een voldoende groot maatglas en door het glas te vullen met precies 25 cl water en de hoogte van het waterniveau te meten.

Voor het berekenen van de lengte en manteloppervlakte van de gebogen glasrand hebben we de afgeleide van de functie nodig. We berekenen de afgeleide met F3 (Berek) – 1:differentieer. We bewaren de afgeleide in y2(x) van de Y-editor.

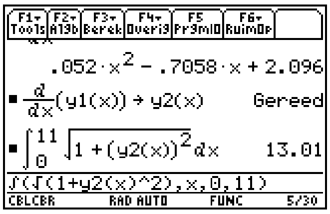


de afgeleide berekenen

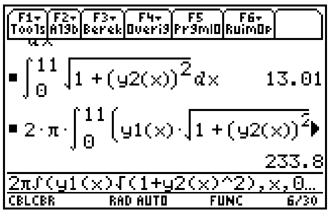


y2(x) bevat de afgeleide

We geven de geschikte formules voor het berekenen van de lengte en de manteloppervlakte in.



de lengte van de kromme (cm)



de manteloppervlakte(cm²)

De lengte van de gebogen kromme kunnen we nauwkeurig nameten met een lintmeter of door een papierstrookje langs de glaswand te houden en er dan de lengte van te meten.

Om de manteloppervlakte te controleren kunnen we met de dikte van de glaswand (ongeveer 2 mm) en de soortelijke massa van glas (2500 kg/m³) de massa van het glas berekenen. De massa van de voet van het glas moet dan wel in rekening gebracht worden. Het tussenstuk van de voet is een cilinder waarvan het volume kan berekend worden. Het eigenlijke voetstuk is bij benadering ook een plat cilinder. Eventueel kan deze vorm ook weer door een regressie benaderd worden als een (deel van een)hyperbool.